THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
~~517~~ 515
F11p

MATHEMATICS
DEPARTMENT

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

Dec 23 1953

L161—H41

Fr. 12.
bdy 55.

PROBLÈMES D'ANALYSE
MATHÉMATIQUE

E. FABRY
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
LAURÉAT DE L'INSTITUT
EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

PROBLÈMES D'ANALYSE

MATHÉMATIQUE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS
LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1913

F11P

PROBLÈMES D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉNONCÉS

CHAPITRE PREMIER

QUADRATURES

1. Calculer $\int_0^\infty \frac{x(1+x)}{(1+2x+2x^2)^2}dx$. (Bordeaux, novembre 1906, épreuve pratique).

2. Décomposer $\frac{x^2+px+q}{(x-1)^3(x+2)^2}$. Déterminer p et q de façon que la fonction primitive soit algébrique. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2+px+q}{(x-1)^3(x+2)^2}dx$. (Lille, juillet 1909, épreuve pratique).

3. Soit $f(x) = \frac{x^2+6(a+1)x+9a+8}{ax^4+6ax^3+(1+9a)x^2+6x+9}$. Déterminer quatre polynômes M, N, P, Q tels que $f(x) = \frac{M}{P} + \frac{d}{dx}\left(\frac{N}{Q}\right)$, où P n'a que des racines simples. Déterminer a de façon que $\int f(x)dx$ soit algébrique. Calculer cette intégrale quand a a une valeur quelconque. (Lille, novembre 1900).

4. Montrer que, des deux intégrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}, \text{ et } \int_1^\infty \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}},$$

256370

une seule a une valeur finie, et calculer cette valeur. (Caen, juillet 1906).

5. Calculer $\int_1^{13} \sqrt[3]{x - \sqrt{2x - 1}}\, \frac{dx}{x - 1}$. (Paris, juillet 1905, pratique).

6. Transformer $I_n = \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^n}{(a - x)^{n+1}}\, dx$, en prenant pour variable $y = \frac{1 - x^2}{2(a - x)}$. Montrer, sur la nouvelle forme, qu'il existe une relation linéaire entre I_m, I_{m-1} et I_{m-2}. Calculer I_3. (Toulouse, juillet 1908, pratique).

7. Calculer $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x \cos \varphi + x^2}}$, pour $\varphi = 32°46'$. (Nancy, novembre 1904, pratique).

8. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x(1 - x)}}$. (Paris, novembre 1903, pratique).

9. Calculer $\int_0^\infty \frac{x \mathrm{L} x}{(1 + x^2)^3}\, dx$. (Paris, juillet 1902, pratique).

10. Calculer $\int_{-1}^{+1} \mathrm{L}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. (Paris, juillet 1904, pratique).

11. Calculer $\int_0^\pi \frac{\cos 3x}{2 + \cos x}\, dx$. (Paris, novembre 1907, pratique).

12. Calculer $\int_0^\pi \frac{dx}{(4 \cos x + 5)^2}$. (Paris, novembre 1905, pratique).

13. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\cos^2 x}}\, dx$. (Bordeaux, juillet 1908 pratique).

14. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$ par la théorie des résidus. 2° En déduire $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx$. (Lyon, novembre 1906).

15. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^3}\, dx$. (Lyon, novembre 1903).

16. Calculer $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\,dx$. (Toulouse, juillet 1907, pratique).

17. Calculer $\int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx$. (Montpellier, juillet 1906, pratique).

18. Calculer $\int_0^\infty \frac{\cos(ax^2)-\sin(ax^2)}{1+x^4}\,dx$, où $a>0$, en se servant de l'intégrale imaginaire $\int \frac{e^{iaz^2}}{1+z^4}\,dz$. (Bordeaux, juillet 1905).

19. Calculer $\int_0^\infty \frac{\mathrm{L}x}{(1+x^2)^2}\,dx$. (Toulouse, novembre 1906, pratique).

20. Calculer, en employant le théorème des résidus $\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx$. (Bordeaux, novembre 1910, pratique).

21. Calculer $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$, où $0<a<1$; 2° Calculer, avec 4 décimales, la valeur de a pour laquelle cette intégrale est égale à $\frac{2}{a}$. (Toulouse, juillet 1902, pratique).

22. Calculer $\int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}\,e^{-x}\sin x\,dx$. (Paris, juillet 1907, pratique).

23. A quelles conditions doivent être assujetties les constantes réelles a et b pour que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x+a)(\cos x-b)}$ ait un sens. Calculer sa valeur en posant $z=e^{xi}$, et en appliquant la théorie des résidus. (Poitiers, juillet 1907).

24. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^2 x+\sin x\cos x+1}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+1}\,dx$. (Bordeaux, juillet 1909, pratique).

25. Condition pour que $\mathrm{I}=\int^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$ ait un sens ;

2° Démontrer qu'on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx\,;$$

3° Si $p = \frac{2m+1}{2n}$, p satisfaisant aux conditions trouvées, montrer que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nx^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx.$$

4° En déduire $I = \frac{\pi}{\sin p\pi}$. (Marseille, juillet 1911, pratique).

26. Calculer $\int_0^{\infty} \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx$, a étant une constante réelle, choisie de façon que l'intégrale ait un sens. (Toulouse, juillet 1905).

27. Calculer $\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{-a}}{b-x}\,dx$, a étant choisi de façon qu'elle ait un sens. Cas particulier où $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$. (Poitiers, juillet 1905, pratique).

28. Calculer, par la méthode de Cauchy, l'intégrale réelle $\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$. (Toulouse, novembre 1903).

CHAPITRE II

—

INTÉGRALES MULTIPLES
SURFACES-VOLUMES

Surfaces et Volumes. — 29. Sur la courbe

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = t\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

on donne deux points A, B

$$t_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad t_2 = \operatorname{tg} \beta, \; -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Calculer l'aire du triangle curviligne AOB (*fig.* 1) limité par la droite AB. (Besançon, novembre 1907, pratique).

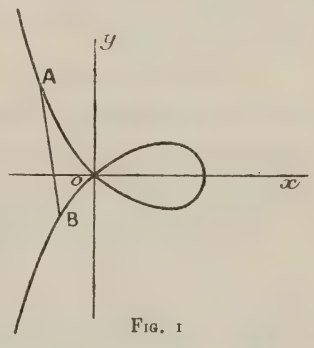


Fig. 1

30. Une ellipse a pour équation

$$x^2 + 3y^2 = 6y.$$

La droite $y = x$ divise sa surface en deux parties d'aires A et B.

Calculer le rapport $\frac{A}{B}$. (Bordeaux, novembre 1906, pratique).

31. Construire l'une des courbes définies par l'équation différentielle

$$dx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\, dy.$$

Evaluer l'aire limitée par cette courbe. (Caen, juillet 1910, prat.).

32. Calculer l'aire de la portion du cône $z^2 + y^2 = x^2$, située au-dessus du plan xoy, qui se projette à l'intérieur de la courbe

$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, dans l'angle xoy, des parties positives des axes. (Grenoble, novembre 1905, pratique).

33. Calculer la surface de la portion du cylindre $y^2 = 2px$, qui est intérieure à l'ellipsoïde

$$x^2 + a^2y^2 + z^2 = px\left(2a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

(Montpellier, novembre 1905, pratique).

34. Étudier la projection, sur xoy, de l'intersection des deux surfaces :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz \text{ et } ax^2 + by^2 = z^2.$$

Evaluer l'aire de la portion de la première, qui est intérieure à la seconde. On suppose $a > b > o$. (Grenoble, juil. 1905, pratique).

35. Aire de l'ellipsoïde de révolution $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$. (Lyon, juillet 1906).

36. Déterminer l'aire de la portion de la surface

$$z = \frac{\sqrt{2}}{3}(x + y)^{\frac{3}{2}}$$

qui se projette sur le plan xoy, à l'intérieur du triangle dont les côtés ont pour équations $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$. (Toulouse, novembre 1906).

37. Calculer l'aire de la portion de la surface $2az = x^2 - y^2$, qui se projette, sur le plan xoy, à l'intérieur de la courbe qui a pour équation, en coordonnées polaires, $\rho = a\sqrt{\cos\omega}$. (Nancy, novembre 1904).

38. On donne le paraboloïde $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, $a > 0$, $b > 0$, et le cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$. Calculer l'aire de la portion du paraboloïde intérieure au cylindre, et le volume intérieur au cylindre compris entre le paraboloïde et le plan xoy. (Montpellier, juil. 1908, pratique).

39. Calculer l'aire de la portion du paraboloïde $z = xy$, qui se projette sur le plan des xy, dans l'angle des parties positives des axes, à l'intérieur de la courbe représentée en coordonnées polaires par $\rho^2 = \cos\omega$. Calculer le volume du cylindre projetant cette aire, compris entre le paraboloïde et le plan xoy. (Toulouse, nov. 1907, pratique).

40. Un solide est limité par le cône $z^2 = 2xy$ et le cylindre $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, où les radicaux ont les valeurs positives. Calculer son volume, l'aire de la surface conique qui le limite, l'aire de la surface cylindrique qui le limite. (Bordeaux, juillet 1910, pratique).

41. Calculer le volume intérieur à la fois de la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ et à l'ellipsoïde

$$x^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + y^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} + z^2 = R^2, \qquad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

(Montpellier, juillet 1903).

42. Calculer le volume du solide commun aux deux paraboloïdes $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} = 2z$, $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 2(2 - z)$. (Toulouse, nov. 1905, prat.).

43. On donne l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et le paraboloïde $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x - \lambda}{\mu - \lambda} \frac{a^2 - \mu^2}{a^2}$; on suppose $-a < \lambda < \mu < a$. Montrer que le paraboloïde divise le volume de l'ellipsoïde en 2 parties. Evaluer ces deux volumes. Déterminer λ de façon qu'ils soient égaux. (Montpellier, juillet 1902, pratique).

44. Trouver le volume limité par la surface, lieu des cercles de courbure des sections normales en un point d'une surface, sachant que le rayon de courbure de la section normale qui fait avec un plan normale fixe l'angle ω, est

$$R = \frac{c^3}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega}$$ (Poitiers, novembre 1905, pratique).

45. Calculer la surface du paraboloïde $xy = az$, qui est intérieure au cylindre $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. 2° le volume intérieur au cylindre, limité par le paraboloïde et le plan xoy. On supposera $a > o$. (Montpellier, juillet 1907, pratique).

46. On considère la surface $z = \rho - a \cos \omega$, $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, $a > o$, et un solide S, limité par cette surface, les plans $z = o$, $z = a$, et la condition $-\frac{\pi}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$. Calculer l'aire d'une section par le plan $z = c$, le volume du solide, les coordonnées de son centre de gravité. Montrer que la fonction z vérifie l'équation

$$x^2 \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy \frac{\delta^2 z}{\delta xy} + y^2 \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = o.$$ (Rennes, juillet 1909, pratique).

47. Déterminer une courbe plane passant par O, telle que l'aire engendrée par la rotation de l'arc OM autour de OX soit dans un rapport constant K avec l'aire engendrée par la rotation de la tangente MT limitée à OX. Examiner le cas particulier où $K = \frac{4}{3}$. (Paris, novembre 1903).

48. Une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont ox et oz, tourne autour de oz, et engendre une surface S. 1° Evaluer le volume compris entre la surface S, le plan xoy, et un cylindre ayant pour section droite une courbe c du plan xoy. Ramener le problème à une intégrale simple. 2° Si la courbe c entoure l'origine, le solide a des points à l'infini, montrer que le volume est fini. 3° Calculer le volume lorsque c est une ellipse dont un foyer est en o. (Marseille, juillet 1901, pratique).

49. Sur le paraboloïde $z = k\frac{y}{x}$, on considère l'aire limitée par quatre génératrices, dont deux sont des axes de coordonnées, les deux autres sont dans les plans $x = 1$, et $z = 2$. Calculer le volume du cylindre compris entre cette aire et sa projection sur le plan xoz. 2° Calculer k sachant que le paraboloïde se raccorde le long de oz avec la surface

$$x = t^2(1 + u_1)z + t(1 + u_2)$$
$$z = t(2 + u_3)z + t^2(1 + u_4)$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 sont des fonctions uniformes du paramètre t, qui s'annulent pour $t = 0$. (Marseille, novembre 1906, pratique).

50. Calculer le volume limité par le plan xoy, la surface

$$z = \frac{xy}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

où x et y restent positifs, et le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$. 2° Le centre de gravité de ce volume homogène. (Rennes, juillet 1906, pratique).

Intégrales multiples. — 51. Calculer l'intégrale double $\iint x^2 y \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx\, dy$ étendue à la région définie par les inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^3 + y^3 \leqslant 1$.

52. Calculer l'intégrale de surface

$$I = \iint x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

sur la surface définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= (a + b\cos\theta)\sin\varphi, \\ z &= b\sin\theta, \end{aligned}$$

où θ et φ varient de 0 à 2π. (Lyon, juillet 1911, pratique).

53. Calculer $\int_0^a dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y\cos x + 1}$, $0 < a < 1$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} L(1 + a\cos x)\frac{dx}{\cos x}$, application numérique $a = 0{,}25$. (Poitiers, novembre 1903, pratique).

54. Calculer l'intégrale double $\iint \frac{y\,dx\,dy}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}$ à l'intérieur du quadrilatère curviligne limité par les arcs des 4 paraboles de foyer o :

$$y^2 = 4x + 4, \quad y^2 = 2x + 1, \quad y^2 = 9 - 6x, \quad y^2 = 4 - 4x$$

pour lesquels $y > 0$. On pourra faire le changement de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. (Paris, novembre 1904, pratique).

55. Calculer $\iiint (2x + 3y + 6z)^2\,dx\,dy\,dz$, prise à l'intérieur de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$. (Bordeaux, juillet 1906, pratique).

56. Calculer $\iiint \left[(x + y + z)^2 - \frac{9}{5}a^2\right] dx\,dy\,dz$, lorsque x, y, z prennent toutes les valeurs vérifiant les deux inégalités :

$$x^2 + y^2 - 2az < 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 < 0.$$

(Montpellier, novembre 1898).

57. Calculer $\iint \frac{dx\,dy}{+\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ étendue à l'aire du triangle limité

par les droites $x = 1$, $y = 0$, $x = y + a$, $0 < a < 1$. Valeur limite pour $a = 0$. (Besançon, juillet 1907, pratique).

58. On donne un cercle de rayon a. Soit φ l'angle des tangentes issues d'un point P du plan, de l'élément d'aire entourant le point P. Calculer $\int(\varphi - \sin\varphi)de$, étendue à la partie du plan extérieure au cercle. (Toulouse, juillet 1906, pratique).

59. Evaluer à 0,1 près la valeur de l'intégrale $\iint \frac{dx\,dy}{x\sqrt{|y|}}$, dans la portion de l'ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, comprise entre les droites $x = 1$, $x = 2$. (Montpellier, novembre 1906, pratique).

CHAPITRE III

—

FONCTIONS ANALYTIQUES. INTÉGRALES CURVILIGNES

60. Démontrer qu'il existe une fonction analytique $f(z) = u + vi$, de la variable $z = x + yi$, telle que $u - v = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}$, qui s'annule pour $z = \frac{\pi}{2}$. Déterminer les fonctions u et v de x et y, et $f(z)$. Calculer $\int_0^z \frac{dz}{f(z)}$, et les diverses valeurs qu'elle prend quand la variable z suit un contour arbitraire, (Montpellier, novembre 1906).

61. Trouver la valeur finale de $u = \text{arc tg}\sqrt{1 - z}$, lorsque la variable complexe z décrit le segment de droite allant de $z = 0$ à $z = 1 + \sqrt{-1}$. Si $u = \frac{\pi}{4}$ pour $z = 0$. (Paris, novembre 1903).

62. Appliquer le théorème des résidus au calcul de l'intégrale $\int \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}}$ le long d'un cercle de rayon 4, de centre 0. (Bordeaux, novembre 1906).

63. Calculer à 0,0001 près l'intégrale $u = \int_0^1 \frac{dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2+2}}$: 1° quand z va du point 0, au point 1, sur l'axe réel ; 2° quand z va de 0 à 1 sur un arc de cercle qui passe par le point $z = \frac{i}{2}$; 3° quand z suit un arc de cercle qui passe par le point $z = \frac{4i}{3}$. (Marseille, juillet 1906, pratique).

64. On a $I = \int (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy$, intégrale curviligne, le long d'un contour c allant de 0 au point (x, y). Déterminer la fonction z, la plus générale, de x et y, telle que I ne dépende pas de c, mais seulement de l'extrémité (x, y). Déterminer celle des fonc-

tions z, qui se réduit à y^2, pour $x = 0$; Calculer l'intégrale I correspondante. (Nancy, novembre 1904).

65. Calculer $\int \frac{dz}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$: 1° le long d'un cercle de centre 0, de rayon supérieur à 2 ; 2° le long d'une couronne circulaire ayant pour centre 0, un rayon supérieur à 2, l'autre entre 1 et 2 ; 3° en déduire l'intégrale réelle $\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}$. (Bordeaux, novembre 1905).

66. Calculer $\int \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, sur un cercle de centre 0, de rayon 2. Résidu pour $z = \infty$. (Lyon, novembre 1906).

67. On forme $\int e^{-z^2} dz$ sur le contour d'un triangle ayant pour côtés l'axe ox, la bissectrice des axes, et une droite $x = a > 0$. Démontrer que $1 - e^{x^2} + x \int_0^x e^{y^2} dy$ reste négatif, si $x > 0$, et en déduire que $\int e^{-z^2} dz$, sur le côté $x = a$ du triangle, tend vers zéro, pour $a = +\infty$. Trouver la limite de l'intégrale sur la bissectrice des axes, sachant que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. (Marseille, juillet 1907, pratique).

68. On a $f(z) = \int_0^z d\xi \int_0^\xi \frac{2+x}{(1+x)^2} dx$, où $\int_0^z$ est prise le long d'une courbe c, de sorte que ξ est un point variable. On suppose en outre $\int_0^\xi$ prise sur la partie $o\xi$ de c. Quand c varie, quelles sont les différentes valeurs de $f(z)$. Comment serait changé le résultat, si on abandonnait la seconde hypothèse, sur $\int_0^\xi$. (Poitiers, juillet 1909).

69. Le point z décrit un chemin allant du point $z_0 = \sqrt{-1}$, au point $z_1 = 1 + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)\sqrt{-1}$, sur une chaînette symétrique par rapport à l'axe des y. Calculer la longueur de ce chemin à 0,001 près. (Marseille, juillet 1905, pratique).

70. Une circonférence de centre o, de rayon R, coupe l'axe oy

en A et B, la partie positive de l'axe ox en C. Calculer l'intégrale $I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z^3 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1}$, $z = x + yi$: 1° le long de la circonférence précédente ; 2° le long du contour formé de la demi-circonférence ACB et du diamètre BA. On supposera $p < R^3 < p + 1$, où p est entier positif. (Bordeaux, juillet 1906).

71. On considère $\int \frac{z^2 dz}{z^4 + z^2 + 1}$ sur un contour formé de l'axe des x, et d'une demi-circonférence de centre o, au-dessus de cet axe. Déterminer la limite de l'intégrale sur la demi-circonférence lorsque son rayon devient infini. Calculer $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$, et sa valeur numérique à 0,001 près. (Marseille, juillet 1909, pratique).

72. On fait décrire à la variable complexe z le segment de droite joignant l'origine au point $z = +i$. Quelle est la valeur finale de la fonction arc sin z, si la valeur initiale est $+\pi$. (Paris, novembre 1905).

73. Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et y. Démontrer que l'intégrale double $F(x, y) = \iint f(u, v)\,du\,dv$ étendue à l'aire du triangle limité par la bissectrice de l'angle xoy, et les parallèles aux axes menées par le point variable M, est une fonction des coordonnées x et y de ce point, qui satisfait à la relation :

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x y} + f(x, y) = 0.$$

En déduire une intégrale de l'équation

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x y} + f(x, y) = 0$$

qui soit égale à x^2, et dont la dérivée soit égale à e^x, lorsque M est sur la bissectrice de l'angle xoy. (Paris, juillet 1907).

74. Calculer $\int \frac{(1 + z + z^2)\,dz}{\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}}$ le long d'un contour fermé simple entourant les trois points 1, 2, 3, en précisant la détermination du radical. (Bordeaux, juillet 1909).

75. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{x\mathrm{L}(x^2+y^2)-x^2y\,dx+y\mathrm{L}(x^2+y^2)+x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

prise le long d'un chemin joignant le point $\mathrm{A}(x=1,\ y=0)$ au point $\mathrm{P}(x, y)$ situé dans l'angle xoy, en contournant une fois l'origine dans le sens positif. (Paris, novembre 1903, pratique).

76. Développer $\frac{1}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}$ suivant les puissances de x, en supposant x réel et $x^2<1$.

2° Calculer $\int_0^{2\pi}\frac{\alpha\,d\alpha}{1-2x\cos(\alpha-\beta)+x^2}$, où β est constant. (Toulouse, novembre 1908, pratique).

77. Déterminer la fonction $u=p+qi$, de la variable $z=x+yi$, vérifiant la relation

$$2xyp+(y^2-x^2)q+2xy(x^2+y^2)^2=0.$$

(Besançon, juillet 1910, pratique).

78. Appliquer le théorème des résidus au calcul de l'intégrale

$$\int_c (a+a_1z+a_2z^2+a_3z^3)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$$

sur un cercle c de rayon R compris entre 1 et 2. (Bordeaux, juillet 1904, pratique).

79. Soit $f(u)$ une fonction uniforme n'ayant que des singularités isolées, c un cercle de centre o sur lequel il n'y a aucun point singulier : 1° démontrer que $\mathrm{F}(z)=\int e^{uz}f(u)du$ prise sur le cercle c, dans le sens positif, est une fonction entière de z ; 2° qu'on peut, sans changer $\mathrm{F}(z)$, remplacer $f(u)$ par une fonction n'ayant aucune singularité extérieure à c à distance finie ; 3° $f(u)$ étant dans ces conditions, soit

$$f(u)=\ldots+\mathrm{A}_{-2}u^2+\mathrm{A}_{-1}u^1+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1u^{-1}+\mathrm{A}_2u^{-2}+\ldots$$

le développement dans le domaine de $u=\infty$. Former la série qui représente $\mathrm{F}(z)$ dans tout le plan ; 4° $\mathrm{Q}(u)$ étant un polynôme de degré q, dont les zéros sont tous intérieurs à c, on suppose

$f(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}$. Montrer qu'on peut supposer le polynôme P de degré $q - 1$ au plus. Montrer que ces fonctions, où P est un polynôme arbitraire, vérifient une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre q ; 5° Trouver l'expression générale de $F(z)$ qui correspond à un polynôme $Q(u)$. (Besançon, juillet 1905).

80. Déterminer tous les zéros et tous les pôles de la fraction rationnelle

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z - t)(z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1)}$$

dont t est un pôle simple. 2° Calculer $\int f(z)dz$ autour de chacun des pôles. 3° Montrer que la somme de ces intégrales est nulle, et qu'on peut en déduire la décomposition de la fraction

$$\frac{t + 1}{t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1};$$

4° calculer sa fonction primitive. (Marseille, novembre 1907, pratique).

81. $u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 1}}$ définit une fonction uniforme et méromorphe

$$z = f(u) = \frac{A}{u} + B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \ldots$$

au voisinage de $z = 0$. Calculer les coefficients A, B_0, ... jusqu'à B_8, en supposant $\frac{\sqrt{z^4 + 1}}{z^2}$ égal à $+1$, pour $z = \infty$. (Bordeaux, novembre 1904, pratique).

82. Calculer $\int \frac{dz}{(z - a)^n (z - b)^n}$ sur un cercle c de centre 0, de rayon 1, en supposant n entier positif, et $|a| < 1 < |b|$. (Rennes, juillet 1906).

83. Calculer $\int \frac{dz}{z^2 - 2azi + 1}$ et $\int \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 2azi + 1)^2} dz$, où a est réel, et positif, prises sur un cercle c de centre 0, de rayon 1. 2° Calculer $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + i \cos \varphi}$ et $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a + i \cos \varphi)^2}$ en posant $e^{\varphi i} = z$. (Rennes, juillet 1906).

Séries. 84. Déterminer les différents développements en séries de Maclaurin et Laurent, suivant les puissances de z, de $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$. (Toulouse, novembre 1905).

85. Développer la fonction $L\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$ en série de Fourier, suivant les sinus et cosinus des multiples de x. (Poitiers, juillet 1909, pratique).

86. Déterminer le développement en série de Laurent de $\frac{1}{1+z^2}$ entre les deux cercles de centre $z=\frac{i}{2}$, et de rayons $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. (Marseille, juillet 1908, pratique).

CHAPITRE IV

—

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

87. Intégrer l'équation :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{x^2} + 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

(Rennes, novembre 1909, pratique).

88. Intégrer le système d'équations :

$$\frac{du}{dx} = u + v - w + 2 \cos x - \sin x$$
$$\frac{dv}{dx} = -2u + 3v - w - 7 \cos x - \sin x$$
$$\frac{dw}{dx} = -3u + 2w - 4 \cos x + \sin x.$$

(Caen, juillet 1911, pratique).

89. Intégrer l'équation :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 15x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 61x \frac{dy}{dx} + 64y = \frac{8}{x^2} + \frac{33}{x}.$$

(Caen, juillet 1907 pratique).

90. Intégrer le système d'équations :

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \qquad \frac{dy}{dt} = z + x, \qquad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Déterminer x, y, z de façon que, pour $t = 0$, on ait $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ où α, β, γ sont trois constantes données.

Montrer que la courbe décrite par le point (x, y, z) est plane, et que, lorsque α, β, γ varient, son plan passe par une droite fixe. (Montpellier, novembre 1909, pratique).

91. Intégrer l'équation :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

soit par la méthode de Laplace, soit en la ramenant à une équation du sixième ordre à coefficients constants. (Nancy, novembre 1909, pratique).

92. On a le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} - y\sqrt{1-k^2} = \varphi(t), \qquad \frac{dy}{dt} + x\sqrt{1-k^2} + kz = 0,$$
$$\frac{dz}{dt} - ky = 0$$

où $0 < k < 1$, $\varphi(t)$ est une fonction connue. 1° Si (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) sont deux systèmes de solutions des équations sans second membres ($\varphi = 0$), $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ reste constant, et l'on a une nouvelle solution en posant :

$$x_3 = y_1z_2 - z_1y_2, \qquad y_3 = z_1x_2 - x_1z_2, \qquad z_3 = x_1y_2 - y_1x_2;$$

2° Trouver trois systèmes de solutions des équations sans second membre tels que, pour $t = 0$, on ait :

$$\begin{array}{lll} x_1 = \sqrt{1-k^2}, & y_1 = 0, & z_1 = k; \\ x_2 = 0, & y_2 = 1, & z_2 = 0; \\ x_3 = -k, & y_3 = 0, & z_3 = \sqrt{1-k^2}. \end{array}$$

3° Indiquer les quadratures qui donneraient la solution des équations avec second membre, achever le calcul en supposant $\varphi(t) = -a\sqrt{1-k^2}\sin(kt)$. (Rennes, juillet 1908).

93. Intégrer l'équation différentielle :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2(1-a)x^2\frac{d^2y}{dx^2} + a^2\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = bx + c$$

cas particulier où $a = 1$. (Montpellier, novembre 1907).

94. Intégrer le système d'équations :

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - z, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \qquad \frac{dz}{dt} = 3x - 3y - z.$$

(Marseille, novembre 1903, pratique).

95. Intégrer l'équation $2yy' = x(y'^2 + 1) + y'^4 - 3y'^2$.

Montrer qu'il existe une courbe intégrale passant au point $x = 0$, $y = -1$, dont la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $y' = 0$. Construire cette courbe. (Besançon, juillet 1911, pratique).

96. Intégrer l'équation :

$$(x^4 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (5x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} + 3x(3x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) = 0.$$

Trouver la courbe intégrale passant par l'origine, et admettant ce point comme point d'inflexion. (Besançon, juillet 1905, pratique).

97. On donne l'équation $\frac{dy}{dx}(1 - x^3) = y^2 - x^2y - 2x$.

1° Déterminer une solution de la forme $y = ax^2$; 2° La solution générale ; 3° Trouver les solutions de la forme $y = ax + b$, et s'en servir pour retrouver la solution générale. (Nancy, juillet 1906).

98. On donne l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2}{x^3}y^3 - \frac{x+1}{x}y^2 + \frac{x^2+3}{3x}y + f(x).$$

Déterminer la fonction $f(x)$ de façon que l'équation admette une solution β telle que, posant $y = \beta + z$, z dépende d'une équation de Bernouilli. f étant ainsi déterminé, calculer l'intégrale générale. (Grenoble, juillet 1910, pratique).

99. Intégrer l'équation différentielle :

$$x^2\left(\frac{dy}{dx} + y^2\right) = a(xy - 1). \qquad \text{Cas particulier } a = 1.$$

(Montpellier, juillet 1909, pratique).

100. Intégrer l'équation :

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)\frac{dy}{dx} - \frac{y}{4} = 0,$$

sachant qu'elle a une solution de la forme $y = x^n$. (Poitiers, juillet 1903, pratique).

101. Etudier les courbes intégrales de l'équation :

$$(ax + by + c)dx + (ay - bx + c')dy = 0.$$

(Grenoble, juillet 1908, pratique).

102. Démontrer que l'équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x + p + q)\frac{dy}{dx} + py = 0$$

où p et q sont entiers positifs, a pour intégrale un polynôme. En déduire qu'elle a une autre intégrale de la forme $e^x P(x)$, où P est un polynôme. (Paris, juillet 1903).

103. On a les deux équations :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 2x - \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{4x^3+4x^2+3x+2}{x\sqrt{1+x}}\right)\frac{y}{4(1+x)} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\right)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\right)\frac{y}{4} = 0$$

montrer qu'elles ont une solution commune et les intégrer. (Bordeaux, juillet 1907, pratique).

104. Soit l'équation :

$$(\mathrm{E}_a) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + ((a+2)x - a - 1)\frac{dy}{dx} + \frac{2a+1}{4}y = 0$$

où a est constant. 1° Montrer qu'elle admet deux intégrales

$$y_0 = \varphi(a, x), \qquad y_1 = x^{-a}\varphi(-a, x),$$

où $\varphi(a, x)$ est une série de puissances entières de x, dont les coefficients dépendent de a, égale à 1 pour $x = 0$; 2° Trouver la limite de $\frac{y_0 - y_1}{a}$ pour $a = 0$; 3° Déterminer la transformée de E_a, par le changement de variables $x = \frac{1}{t}$, $y = \mathrm{T}\sqrt{t}$, et comparer à E_{-a} ; 4° Etudier les intégrales de l'équation E_0, pour $a = 0$, dans le voisinage des points $x = 0$, 1, et ∞. (Rennes, juillet 1905).

105. Intégrer l'équation : $2x^3dy = (y^3 + 3x^2y)dx$. (Grenoble, juillet 1904, pratique).

106. Vérifier que l'équation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right) - 9y^4 - 12y^2 = 0$$

est satisfaite identiquement, quand on pose :

$$y = 3(t + t^3), \qquad \frac{dy}{dx} = 3(1 + t^2)(1 + 3t^2).$$

Etablir une relation entre x et t, et trouver l'intégrale générale de l'équation donnée. (Marseille, novembre 1905).

107. Soit l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy$, où p et q sont des fonctions de x. Quelle relation doit-il exister entre p et q, pour qu'il y ait deux intégrales linéairement indépendantes, liées par la relation $y_1y_2 = 1$. Dans le cas où $p = \frac{1}{x}$, déterminer q, et l'intégrale générale. (Paris, juillet 1902).

108. Intégrer l'équation :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x\sin x + (a + bx^2)\cos x$$

où a, b sont constants. Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que l'intégrale générale soit uniforme. Montrer que, dans ce cas, on peut obtenir cette intégrale sans signes de quadrature. (Paris, novembre 1901).

109. L'équation différentielle

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6x^2 - 2 = 0$$

admet la solution $y = x^2$. Déterminer la solution qui s'annule, ainsi que sa dérivée, pour $x = -1$.

Considérant x comme une variable imaginaire, déterminer les points singuliers de la fonction obtenue, et la manière d'obtenir ses diverses déterminations. (Marseille, juillet 1902).

110. Intégrer le système d'équations différentielles :

$$\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + x\sqrt{3} = \sin t$$
$$\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt} + y\sqrt{3} = \sin t$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + z\sqrt{3} = \sin t.$$ (Toulouse, novembre 1901).

111. Intégrer l'équation différentielle :

$$x + yy' = \frac{3ay'}{1 + y'^2}, \text{ où } y' = \frac{dy}{dx}.$$

2° Déterminer la solution qui représente une courbe tangente à l'axe des y, et construire cette courbe; 3° Calculer le volume engendré par cette courbe en tournant autour de l'axe oy. (Nancy, juillet 1905)

112. On considère deux fonctions u et v, de x, définies par les équations :

$$u = \int_0^\infty \frac{e^{-z} \sin zx}{\sqrt{z}}\, dz, \quad v = \int_0^\infty \frac{e^{-z} \cos zx}{\sqrt{z}}\, dz.$$

1° Montrer qu'elles satisfont à deux équations différentielles du premier ordre, linéaires et homogènes.

2° Intégrer ce système d'équations linéaires, et en déduire les valeurs de u et v. (Lille, juillet 1901).

113. On donne l'équation (1) $y'' + Ay' + By = 0$:

1° Vérifier que la transformée, définie par la relation $\frac{y'}{y} = z$, est l'équation de Riccati $z' + z^2 + Az + B = 0$;

2° Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation (1). On pose

$$u = \frac{y_2}{y_1}, \quad v = \frac{u''}{u}.$$

Montrer que $v = -A - \frac{2y_1'}{y_1}$, et que v est déterminé par une équation de Riccati.

3° A quelles conditions doivent satisfaire les fonctions A et B de x, pour que (1) admette deux intégrales dont le rapport u soit égal à l'une des expressions suivantes :

$$(\alpha)\ u = ax + b, \qquad (\beta)\ u = \operatorname{tg}(ax);$$
$$(\gamma)\ u = \frac{Sh(ax)}{Ch(ax)}, \qquad (\delta)\ u = Lx.$$

Montrer que, si l'une de ces conditions est remplie, l'intégrale de (1) dépend d'une seule quadrature. Achever le calcul en supposant A constant pour les conditions (α) (β) (γ), ou $A = \frac{2m}{x}$ pour pour la condition δ, m étant constant. (Rennes, juillet 1909).

114. Intégrer par différentiation l'équation

$$2y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + \frac{y'^3}{3} - y' + 1.$$

Trouver les courbes passant par l'origine. Il y en a une tangente en ce point à ox. Elle rencontre oy en un autre point A, calculer la longueur de l'arc oA. (Dijon, juillet 1909, pratique).

115. On donne l'équation linéaire

$$(1) \qquad f^2y'' - Xy' + y = 0$$

où f est une fonction donnée de x, et X une fonction à déterminer.

1° Faire le changement de variable $t = \varphi(x)$ de façon que l'équation se réduise à la forme $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y = 0$, K étant constant ; que doit être la fonction X pour que cette transformation soit possible. Déterminer $\varphi(x)$ et intégrer l'équation (1) ; Déterminer X de façon qu'en multipliant (1) par $2y'$ le premier membre soit une dérivée exacte. En déduire l'intégrale générale. (Lille, novembre 1908).

116. Déterminer les deux fonctions $P(t)$ et $Q(t)$ de façon que la fonction :

$$Y = (x - a)\int_b^x f(t)P(t)dt + (x - b)\int_a^x f(t)Q(t)dt,$$

soit une intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$, pour toute forme de $f(x)$, quelles sont les conditions qui déterminent cette intégrale particulière. (Paris, novembre 1907).

117. P et Q étant deux fonctions de x et y, trouver la condition pour que la différentielle $Pdx + Qdy$ admette un facteur intégrant fonction de $u = y^2 - x$. Dans ce cas, montrer que ce facteur peut s'obtenir par quadrature. Application au cas où

$$P = (2y^2 - 2x - 1)e^x + (2y^2 - 3x)e^y$$
$$Q = 2ye^x + 2x(y^2 + y - x)e^y.$$

(Bordeaux, juillet 1910).

118. Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 - y^4)\frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

en prenant pour variables y et $\frac{x}{y}$. Les courbes intégrales c sont unicursales et n'ont aucun point à l'infini : 2° Définir les diverses significations de $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + z + 1)}$, lorsque z décrit un che-

min, dans son plan, du point z_0 à z; 3° Si le chemin suivi est l'une des courbes unicursales fermées c, distinguer les groupes de courbes qui diffèrent par les valeurs d'intégrales qu'elles fournissent. (Marseille, juillet 1910).

119, Intégrer l'équation $y = 2xy' + y'^2$.

Trouver une courbe intégrale passant par un point donné du plan; condition de possibilité. Solution singulière. (Grenoble, novembre 1906).

120. On donne l'équation $\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) + 2x\frac{dy}{dx} = 0$.

1° Intégrer cette équation par diverses méthodes et vérifier l'équivalence des résultats.

2° Former l'équation différentielle des polaires réciproques des des courbes intégrales de l'équation proposée par rapport à la parabole $x^2 = 2y$, et intégrer cette nouvelle équation.

3° Vérifier que les courbes obtenues sont bien les polaires réciproques des premières, par rapport à la parabole. (Grenoble, novembre 1905).

121. Intégrer l'équation différentielle

$$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)\,e^x + 3x.$$

Déterminer l'intégrale qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$x = 0, \quad y = 1, \quad y' = -1, \quad y'' = 0.$$

Calculer à 0,001 près l'ordonnée du point d'abscisse $x = 0{,}8$, et le coefficient angulaire de la tangente en ce point. (Lille, juillet 1911, pratique).

CHAPITRE V

—

COURBES PLANES

122. Déterminer une courbe plane telle que la distance de l'origine des coordonnées à la tangente soit proportionnelle à l'abscisse du point du contact. (Bordeaux, novembre 1904).

123. La tangente en un point M d'une courbe C rencontre ox en T. Déterminer C de façon que le milieu de MT décrive la parabole $y^2 = 2px$. Construire la courbe C lorsque la constante d'intégration est nulle. (Lille, novembre 1909).

124. Déterminer une courbe plane telle que, si un point M de la courbe se projette en P sur OX, la tangente en M coupant OX en T, on ait la relation $OP \cdot PM = PT^2$. (Montpellier, novembre 1906).

125. Par un point M d'une courbe plane, on mène une droite MD de coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de la tangente. Déterminer la courbe telle que MD reste tangente à la parabole $y^2 = 2px$. Calculer le rayon de courbure en un point de cette courbe. (Bordeaux, juillet 1908).

126. Déterminer une ligne plane C, dont la tangente coupe les axes aux points A et B tels que

$$OA + OB = a.$$

1° Former l'équation différentielle des lignes C ; 2° Calculer, pour la courbe C qui correspond à l'intégrale singulière, la longueur A de l'arc compté à partir du point situé sur la droite $y = x$. (On prendra pour variable l'angle φ de la tangente avec la droite $y = x$) ; 3° Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lignes C. Intégrer cette équation. Interpréter géométriquement les résultats. (Rennes, novembre 1908).

127. Etablir entre les constantes α et K une relation telle que l'équation

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + Kx^2 \tag{1}$$

soit l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(2) \qquad x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x(y-h)\frac{dy}{dx} + x^2 - 4hy + 4y^2 = 0.$$

2° Vérifier que l'enveloppe des paraboles (1), quand α varie, est l'intégrale singulière de l'équation (2) ; 3° On pose $x = t\cos\alpha$, de sorte que l'équation (1) donne y en fonction de t. Pour une valeur donnée de α on a ainsi une représentation paramétrique de la parabole (1). Si on considère α comme une fonction de t, $f(\alpha, t) = 0$, ces équations représentent une courbe quelconque S. Déterminer $f(\alpha, t)$ de façon que cette courbe soit une trajectoire orthogonale des paraboles. (Marseille, novembre 1908).

128. On donne le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, et la parabole $x^2 = 2py$; par un point M du plan on mène une tangente MP au cercle ; P étant le point de contact, le rayon PO coupe la parabole en Q. Déterminer une courbe telle que la tangente en tout point M de cette courbe passe par le point correspondant Q. (Bordeaux, juillet 1904).

129. Déterminer une courbe plane telle que le rayon de courbure soit égal à quatre fois la normale limitée à ox. On étudiera deux cas, suivant le sens du rayon de courbure. Dans chaque cas : 1° étudier la forme de la courbe et former ses équations en fonction d'un paramètre ; 2° calculer l'arc de courbe ; 3° calculer l'aire comprise entre la courbe ox, oy convenablement choisi, et une normale quelconque ; 4° chercher la relation entre le rayon de courbure et l'ordonnée. (Montpellier, novembre 1904).

130. Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes

$$(x^2 + y^2)^2 + 2b^2(y^2 - x^2) = a$$

où b est constant, et a est un paramètre variable. (Toulouse, juillet 1907).

131. Trouver une courbe plane telle que sa normale, limitée à l'axe ox, soit dans un rapport donné K, avec la distance de l'origine à la tangente. Cas particuliers où K = 1, 2, 3. (Grenoble, novembre 1903).

132. Déterminer une courbe plane C telle que la projection sur ox du centre de courbure en M, et le point de rencontre de la tangente avec ox, soient symétriques par rapport à la projection P de M sur ox.

2° Vérifier que la distance de P à la normale est constante.

3° Construire la courbe C et sa développée.

4° Calculer l'arc de la courbe C.

5° Calculer l'aire comprise entre un arc de la courbe C, l'axe ox et deux ordonnées. (Toulouse, juillet 1903).

133. La droite $x \sin \theta - y \cos \theta = \theta - \cos \theta$ enveloppe une courbe C, dont on donnera la définition géométrique. Soit ω le centre de courbure au point M de la courbe C. Sur la normale ωM, on prend le point P tel que $\omega P = K . \omega M$. Le point P décrit une courbe. Construire la tangente au point P en supposant d'abord K constant, puis K variable avec θ. Déterminer les courbes qui coupent les normales ωM sous un angle constant α ; et, en particulier, celle de ces courbes qui, pour $\theta = 0$, passe par le même point que la courbe C. Déterminer sa développée. (Lille, juillet 1911).

134. La tangente au point M d'une courbe plane coupe l'axe ox au point T, par ce point T on mène une parallèle TP à la normale en M, qui rencontre en P la perpendiculaire à l'axe ox menée par M. On joint le point P au centre de courbure C de la courbe en M. La droite PC coupe ox en un point Q.

1° Déterminer la courbe connaissant l'abscisse X de Q.

2° Si X est fonction de x, cette détermination se ramène aux quadratures ; on posera $X = xf(x)$.

3° Traiter les cas suivants :

$$f(x) = K, \qquad f(x) = \frac{K}{x}, \qquad f(x) = x$$

où K est constant. (Lille, novembre 1910).

135. Déterminer les trajectoires orthogonales des cercles de rayon R, qui passent par O. (Caen, novembre 1905).

136. Une courbe C est représentée par l'équation $y = f(x)$. Soit P la projection, sur ox, du point M de la courbe ; D la parallèle à la tangente en M, menée par P.

1° Calculer les coordonnées du point de contact N de la droite D avec son enveloppe.

2° Déterminer la courbe C telle que l'ordonnée de N soit les deux tiers de l'ordonnée du centre de courbure de la courbe en M. (Nancy, novembre 1905).

137. Soient MN et MT la normale et la tangente en un point M d'une

courbe plane, limitées à l'axe des x. Déterminer les courbes C telles que

$$ON.OT = K^2,$$

chercher les trajectoires orthogonales C′ des courbes C. En un point de coordonnées positives $x_0 y_0$ passent une branche de courbe C et une branche de courbe C′, qui limitent une aire plane ; calculer cette aire. (Lille, juillet 1903).

138. On donne, dans un plan, un point O et une droite D.

1° Déterminer les courbes C du plan, telles que la distance du point M de la courbe à la droite D soit égale à la distance du point fixe O à la tangente en M.

2° Par un point A du plan passent deux courbes. Trouver le lieu des points A tels que les tangentes en A soient confondues. Etudier la forme des courbes au voisinage du point A. (Paris, juillet 1903).

139. Condition pour que les courbes $f(x, y, \alpha) = 0$ aient un contact du second ordre avec leur enveloppe. Vérifier que les courbes $(y - \alpha\sqrt{2})^2 = 2(1 - \alpha\sqrt{2-1})(2x - \alpha\sqrt{2+1})$ jouissent de cette propriété. (Grenoble, juillet 1909).

140. Déterminer une courbe plane telle que la tangente et la normale en un point M interceptent sur la perpendiculaire menée par O sur le rayon vecteur OM une longueur égale à $\frac{2}{a}\overline{OM}^2$, où a est donné. Construire et rectifier une de ces courbes. (Lille, novembre 1906).

141. Soit $x \sin \alpha - y \cos \alpha = f(\alpha)$ une droite mobile. Soit M le point de contact de cette droite avec son enveloppe. Etablir l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $f(\alpha)$, pour que la longueur OM soit constamment égale au rayon de courbure en M de l'enveloppe. Montrer que son intégration se ramène à des quadratures. (Caen, novembre 1909).

142. On transforme homothétiquement une courbe (S) $Y = \varphi(X)$, par rapport à un point P qui décrit une courbe (S_0), le rapport K d'homothétie variant avec le point P. Déterminer K en fonction de la variable qui définit le point P sur (S_0) de façon que les courbes transformées aient un contact du second ordre avec leur enveloppe.

Application : la courbe (S_0) a pour équation $y_0^2 = 2x_0$, et la courbe (S), $Y^2 = 4X$. (Grenoble, juillet 1909).

CHAPITRE VI

—

COURBES ET SURFACES

143. On considère les courbes c, représentées par l'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

où a est une constante arbitraire. Former leur équation différentielle. Déterminer leurs trajectoires orthogonales. Soit M un point d'une courbe c, θ et α les angles de OM et de la tangente en M, avec OX. Montrer que $\alpha + \frac{\pi}{2} = 3\theta$. Calculer le rayon de courbure en M, $R = \frac{1}{3}\frac{ds}{d\theta}$, s étant l'arc de courbe ;

2° On considère les surfaces S définies, en coordonnées semi-polaires, par l'équation $(\rho^2 + z^2)^2 = (\rho^2 - z^2)f(\omega)$, où f est une fonction arbitraire. Former l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction z de ρ et ω.

En supposant $f(\omega) = 2a^2$ constant, on a une surface de révolution. Calculer ses rayons de courbure principaux en un point de la méridienne, dans le plan $\omega = 0$. (Rennes, novembre 1909).

144. Déterminer les rayons de courbure et de torsion en un point de la courbe $x = 3z^2$, $y = 6z^3$; montrer que cette courbe est une hélice. (Montpellier, juillet 1904, pratique).

145. Une courbe c est représentée par les équations :

$$x = 2abt, \quad y = a^2 \mathrm{L}t, \quad z = b^2t^2$$

où t est un paramètre variable. Calculer l'arc d'une portion de la courbe ; 2° Déterminer le centre de courbure, les rayons de courbure, et de torsion ; 3° Calculer la surface du cylindre parallèle à oz, ayant la courbe c pour directrice, et limité à la courbe c, au plan xoy, et à deux génératrices. (Montpellier, novembre 1907).

146. Déterminer les trajectoires orthogonales des cercles qui

touchent l'axe oz en o, et ont leurs centres sur la droite $z = o$, $x = a$. Montrer que ce sont des cercles situés dans des plans parallèles à oy. (Caen, juillet 1907).

147. Sur la surface $x = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \cos v$, $y = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \sin v$, $z = u$. 1° Déterminer les courbes c, $v = f(u)$, telles que la tangente fasse avec oz un angle α, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$. 2° Par un point M de S passent deux courbes c ; calculer les cosinus directeurs des normales principales et les angles qu'elles forment avec la normale à la surface. 3° Calculer les rayons de courbure et de torsion de la courbe c. (Lyon, juillet 1906, pratique).

148, On donne une courbe c et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Montrer que la condition pour que les tangentes à la courbe soient tangentes à la sphère est que les coordonnées d'un point de la courbe vérifient la relation différentielle

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (xdx + ydy + zdz)^2.$$

Calculer la longueur d'un arc de la courbe c, en fonction des coordonnées des extrémités. Montrer géométriquement que le plan osculateur à c est tangent à la sphère. Déterminer la courbe c par la condition qu'elle soit sur un cylindre de révolution autour de oz, et de rayon donné b. Dans ce cas déterminer le plan osculateur, les rayons de courbure et de torsion. (Bordeaux, juillet 1907).

149. Une courbe c a pour projection sur le plan xoy la sinusoïde $y = \sin x$. Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire z, considéré comme fonction de x, pour que les normales principales de c soient parallèles au plan yoz. 2° Prouver que les tangentes font alors un angle constant avec ox. Ce résultat dépend-il de la forme sinusoïdale de la projection de c. 3° La projection de c étant la sinusoïde donnée, indiquer la nature de c sachant que les tangentes font un angle de 45° avec ox. (Rennes, juillet 1906).

150. Une courbe S, tracée sur un cône de révolution, rencontre les génératrices sous un angle constant. Trouver le lieu S_1 des centres de courbure S. Démontrer : 1° Que les tangentes aux courbes S et S_1 aux points correspondants sont rectangulaires. 2° Que la courbe S_1 est sur un cône de révolution, dont elle coupe les génératrices sous un angle constant. (Grenoble, novembre 1904).

151. On considère les cercles passant par deux points fixes

de oz, symétriques par rapport à o. Leurs équations sont :

$$y = tx, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\theta x - a^2 = 0$$

où t et θ sont deux paramètres arbitraires. On pose $\theta = f(t)$: 1° Démontrer que les cercles ainsi déterminés sont les caractéristiques d'une famille de sphères S. Former leurs équations. Il y a exception pour certaines fonctions f, quelles sont ces fonctions ; 2° Si f n'est pas une de ces fonctions exceptionnelles, déterminer les lignes de courbure de la surface engendrée par la famille de cercles ; 3° Déterminer f de façon que le lieu des centres des sphères S soit la courbe $x = F(y)$ du plan des xy ; cas particulier de la courbe $x = y^2$. (Besançon, juillet 1906).

152. Sur la normale principale, en chaque point M d'une hélice circulaire S, dans le sens de la concavité, on porte une longueur constante $MM_1 = l$; on considère la courbe S_1 lieu du point M_1. On demande de déterminer l de façon que les courbes S et S_1 jouissent de l'une des quatre propriétés suivantes :

1° Les courbes S et S_1 ont même courbure ;

2° Elles ont même torsion absolue ;

3° Les tangentes MT et M_1T_1 aux points correspondants sont rectangulaires ; 4° La tangente M_1T_1 à S_1 est parallèle à la binormale MH en M à S. (Grenoble, juillet 1904).

153. On donne la courbe $y = x^2$, $z = \frac{2}{3}x^3$. 1° Trouver le lieu des parallèles aux tangentes menées par l'origine, et l'enveloppe des plans parallèles aux plans osculateurs ; 2° Calculer l'angle de la tangente à la courbe avec la bissectrice de l'angle xoz ; 3° Déterminer les développantes de la courbe. (Nancy, juillet 1905).

154. Sur la surface $z = X - \frac{y^2}{4X}$, où X est une fonction donnée de x ; 1° Déterminer les courbes c conjuguées des sections de la surface par les plans parallèles au plan zoy ; 2° Déterminer les trajectoires orthogonales des projections des courbes c sur le plan zoy. (Bordeaux, novembre 1910).

Lignes géodésiques. — 155. Former l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface de révolution représentée par les équations

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad z = f(\rho).$$

Montrer que l'intégration se ramène aux quadratures. (Poitiers, juillet 1905).

156. Le point M d'une courbe plane se projette en P sur l'axe oy. Ce point P se projette en Q sur la tangente en M. Déterminer la courbe telle que l'on ait $QM = a$ constant ; 2° Trouver les projections sur un plan perpendiculaire à oy des lignes géodésiques de la surface engendrée par cette courbe autour de oy. (Poitiers, juillet 1905).

157. On donne la surface de révolution autour de oz :

$$x = l \cos \varphi \cos \theta, \quad y = l \sin \varphi \sin \theta,$$
$$z = l\mathrm{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - l \sin \theta$$

où φ et θ sont des paramètres variables, et l constant. Calculer les cosinus des angles a, b, c de la normale avec les axes, en fonction de θ et φ ; 2° Sur cette surface, on considère les courbes satisfaisant à la relation :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sqrt{c} \sin \theta}{\cos^2 \theta \sqrt{l^2 \cos^2 \theta - c}}.$$

Calculer, pour l'une de ces courbes : ds^2, les cosinus des angles α, β, γ, de la tangente avec les axes, les différentielles de ces cosinus, le rayon de courbure, et les cosinus des angles de la normale principale avec les axes ; 3° Démontrer que les lignes considérées sont les lignes géodésiques de la surface. (Marseille, nov. 1906).

158. Intégrer le système d'équations :

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y + mx} = \frac{dz}{z}$$

où m est une constante positive. Montrer qu'une courbe intégrale c, qui passe par le point M_0 $(a, o\ c)$, peut être représentée, en coordonnées semi-polaires, par les équations $\rho = ae^{\frac{\omega}{m}}$, $z = \frac{c}{a} e^{\frac{\omega}{m}}$.

Calculer l'arc M_0M de la courbe c, les coordonnées du centre de gravité de cet arc, et la portion de la surface du cône $z = \frac{c}{a} \rho$ comprise entre les génératrices OM_0, OM et l'arc M_0M de c ; 2° Montrer que la tangente et la normale principale à la courbe c font des angles constants avec OZ. Quelle propriété présente cette courbe sur

le cylindre qui la projette sur le plan XOY. Une surface, lieu d'une infinité de courbes c, peut-elle admettre toutes ces courbes comme lignes géodésiques ; 3° Lorsque M_0 décrit la droite $z = px + q$ du plan XOZ, les courbes c engendrent une surface S, exprimer les coordonnées d'un point de cette surface en fonction de a et ω. Montrer que les lignes $\omega = c$ sont des droites qui coupent chaque courbe c sous un angle constant.

Démontrer que, le long d'une courbe c, la normale principale fait un angle constant avec la normale à la surface. (Rennes, nov. 1907).

CHAPITRE VII

—

LIGNES ASYMPTOTIQUES

LIGNES DE COURBURE

159. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface $z = x^\alpha y^\beta$; cas particulier de la surface $z = xy^2$. (Montpellier, juillet 1905, pratique).

160. De l'expression du rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface, déduire l'équation différentielle des lignes asymptotiques : 1° si x et y sont variables indépendantes ; 2° si $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = f(r, \theta)$. Trouver les projections, sur le plan xoy, des lignes asymptotiques de la surface :

$$z = x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \frac{\gamma}{2} \mathrm{L}(x^2 + y^2). \quad \text{(Poitiers, juillet 1902)}$$

161. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface :

$$z^4 = 4(x^2 + y^2). \quad \text{(Rennes, juillet 1902, pratique).}$$

162. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface :

$$x^2y^2z + x^2 - y^2 = 0,$$

et montrer que ce sont des cubiques gauches. (Toulouse, novembre 1901).

163. Trouver les lignes asymptotiques du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Déterminer la fonction φ de façon que l'une d'elles ait pour équation $a^2(x^4 + y^4) = (y^2 - x^2)^2(y^2 + x^2)$. (Besançon, juillet 1910, pratique).

164. Une courbe de forme invariable, située dans un plan passant par oz, tourne autour de cet axe, en même temps qu'elle

glisse parallèlement à l'axe suivant une loi quelconque. Déterminer dans quel cas les lignes planes $x = c$ sont des lignes asymptotiques de la surface engendrée. Quelles sont alors les autres lignes asymptotiques ; 2° Former, dans le cas général, en coordonnées rectangulaires (x, y), l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des sections de la surface par les plans $z = c$. Dans quel cas cette équation est-elle homogène. (Toulouse, novembre 1908).

165. Par chaque point de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, on trace la droite D parallèle au plan xoy, et rencontrant oz. Montrer que cette droite est dans le plan osculateur au point M de la courbe. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface, lieu de la droite. (Nancy, novembre 1907).

166. Une surface S est définie par les équations :

$$x = \frac{-1}{u'_\alpha}, \qquad y = \beta x, \qquad z = \alpha + ux$$

où u est une fonction des deux paramètres α, β. 1° Former les équations du plan tangent et de la normale en un point de S ; 2° L'équation différentielle des lignes asymptotiques ; 3° Montrer que les courbes $\alpha = c$ et $\beta = c$ sont conjuguées ; 4° Que la développable circonscrite à S, le long d'une courbe $\alpha = c$, est un cône dont le sommet est sur oz ; 5° Que, si $u = AB + \alpha B_1 + B_2$ où A ne dépend que de α, et B, B_1, B_2 de β, la développable, circonscrite à une courbe $\beta = c$, est aussi un cône ; 6° Montrer que, si B_1 et B_2 sont des fonctions linéaires, la détermination des lignes asymptotiques dépend de quadratures. (Grenoble, novembre 1907).

167. On donne la surface $z = a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, et le cylindre parallèle à oz, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Calculer l'arc de la courbe c d'intersection ; 2° Calculer le volume situé dans l'angle des coordonnées positives, limité par le plan des xy, le cylindre, et la surface donnée ; 3° Calculer le rayon de courbure de la courbe c, et étudier ses variations. (Besançon, novembre 1902).

168. Une surface S est définie par les équations :

$$x = a(1 + \cos\theta) \operatorname{cotg} \varphi, \qquad y = a(1 + \cos\theta), \qquad z = \frac{a \sin\theta}{\sin\varphi}.$$

Calculer les cosinus directeurs de la normale. Déterminer les lignes asymptotiques. (Bordeaux, novembre 1905).

169. Une surface a pour équation $z = f(xy)$, f étant une fonction du produit xy. Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques, et ramener leur recherche à des quadratures; 2° Appliquer les formules générales à la surface $Lz = a\sqrt{xy}$; 3° Déterminer f de façon que l'un des systèmes de lignes asymptotiques se projette sur le plan xoy suivant les courbes $y = cx^n$, et déterminer le second système de lignes asymptotiques. (Montpellier, novembre 1905).

170. Rechercher les surfaces telles que les deux systèmes de lignes asymptotiques se projettent sur le plan xoy suivant les deux familles de droites et de courbes $y = c$, $xf(y) = c'$, où f est une fonction donnée de y. (Bordeaux, juillet 1909).

171. Déterminer les lignes asymptotiques γ, autres que les génératrices rectilignes, de la surface

$$z = y \sin x,$$

et montrer qu'elles coupent orthogonalement la génératrice oy; 2° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes γ; 3° En un point M de oy passe une courbe γ. Déterminer le centre de courbure, le rayon de courbure R, et la droite polaire Δ de γ en M; 4° Variation de R quand M décrit oy; 5° Lignes asymptotiques de la surface décrite par Δ quand M décrit oy. (Besançon, juillet 1907).

172. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface

$$x \operatorname{cotg} \frac{y}{x} = 1 - z \operatorname{cotg} z$$

$\left(\text{On pourra prendre pour variables } z \text{ et } \frac{y}{x}\right)$. (Lyon, juillet 1910).

173. On considère la cubique $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Le plan osculateur au point M coupe l'axe oz au point A. On considère la surface réglée S engendrée par la droite MA. Déterminer ses lignes asymptotiques.

Dans le plan xoy on a les deux points B($x = y = 1$), et C ($x = 1$, $y = 2$), par chacun de ces points passent deux lignes, projections des lignes asymptotiques de S. Ces quatre lignes forment un quadrilatère curviligne BECD, dont B et C sont deux sommets opposés. Déterminer le volume du cylindre parallèle à oz, ayant pour base ce quadrilatère, et limité à la surface S. (Lyon, novembre 1910, pratique).

174. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface

$$x = (1 + u)\,\mathrm{ch}\,v, \qquad y = (1 - u)\,\mathrm{sh}\,v, \qquad z = u;$$

2° Même question, en remplaçant le cosinus et le sinus hyperboliques par le cosinus et le sinus ordinaires $\cos v$, $\sin v$; 3° Rapprocher les deux questions. (Marseille, juillet 1911, pratique).

175. Soient R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux en un point M d'une surface de révolution S. R_1 étant le rayon de courbure qui correspond au centre de courbure situé sur l'axe. Former l'équation différentielle de la courbe méridienne pour que $\frac{R_1}{R_2}$ soit égal à une fonction donnée de l'angle φ que fait avec l'axe le plan tangent à la surface au point M. 2° Intégrer cette équation en supposant $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{\cos\varphi} - 1$. Cas où $m = 0$. (Paris, novembre 1907).

176. Déterminer les rayons de courbure, et les centres de courbure principaux, en un point de la surface $z = y\,\mathrm{tg}\,x$. 2° Déterminer ses lignes asymptotiques. 3° Chercher le lieu des centres de courbure principaux en M, lorsque ce point décrit l'une des lignes asymptotiques. 4° Pour chacune des courbes obtenues, calculer la longueur de l'arc compris entre deux points donnés. (Montpellier, novembre 1908).

177. Soient α, β, γ les angles avec les axes ox, oy, oz, de la normale à la surface $z = f(x) + \varphi(y)$.

1° Déterminer les fonctions f et φ de façon que les rayons de courbure principaux soient liés par la relation $(R + R_1)\cos\gamma = C$.

2° Montrer que l'on peut choisir ces fonctions de façon que $(R - R_1)\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$ soit, en même temps, constant.

3° Déterminer les lignes de courbure de ces dernières surfaces, et les centres de courbure principaux. (Montpellier, juillet 1906).

178. On considère la surface S, enveloppe de la sphère variable

$$(x - a)^2 + [y - f(a)]^2 + z^2 = 1.$$

Trouver géométriquement une famille de lignes de courbure. 2° Démontrer que la seconde famille est formée de courbes planes, qui se projettent sur le plan xoy suivant des courbes parallèles. 3° Déterminer les centres de courbure principaux en un point de S. (Bordeaux, juillet 1910).

179. Vérifier que les deux systèmes de sphères :

$$ax\lambda^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\lambda + 2ay = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 2a(x + y)\cos\mu + 2az\sin\mu$$

où λ et μ sont des paramètres arbitraires, ont même enveloppe. Déterminer les lignes de courbure de cette enveloppe, les centres de courbure principaux, et le lieu de ces centres de courbure. (Marseille, novembre 1907).

180. Une surface a pour équation

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

Soient C et C′ les centres de courbure principaux au point M, A le milieu de CC′. Déterminer les fonctions f et φ de façon que la projection de MA sur oz soit constante. Calculer les rayons de courbure principaux pour les surfaces obtenues. Déterminer leurs lignes asymptotiques. Si α, β sont les angles de la normale en M avec ox et oy, D la projection de CC′ sur oz, montrer que, parmi les surfaces obtenues, il y en a pour lesquelles D tg α tg β est aussi constant. (Montpellier, juillet 1908).

181. Les courbes planes formant une famille de courbes parallèles ont même développée. Application aux courbes parallèles à la courbe :

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u, \qquad y = \psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u.$$

2° Lignes de courbure et rayons de courbure principaux de la surface engendrée par la courbe

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u + \varphi(z)\cos u$$
$$y = \psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u + \varphi(z)\sin u$$

quand u varie. Mode de génération par chacun des systèmes de lignes de courbure. Montrer que la surface est une surface moulure. (Grenoble, juillet 1908).

182. Déterminer les lignes de courbure de la surface

$$x = \sin u \sin v, \qquad y = \sin u \cos v, \qquad z = \cos u + \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + f(v).$$

Montrer que l'un des systèmes c_1 est formé de courbes planes, et l'autre c_2 de lignes sphériques. Déterminer f de façon que les plans

des courbes c_1 rencontrent la surface sous le même angle. Quelle est alors la relation entre u et v qui détermine les courbes c_1. (Grenoble, novembre 1908).

183. Montrer que les normales à la surface S

$$x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2)$$

coupent les plans xoy et xoz en des points dont le lieu, sur chacun de ces plans, est une simple ligne. En déduire, sans intégration, les lignes de courbure de S. (Caen, juillet 1906).

184. On a la surface S :

$$x = -u^3 + 3uv^2 + 3u, \qquad y = -3u^2v + v^3 - 3v,$$
$$z = 3u^2 - 3v^2.$$

où u et v sont variables. Déterminer : 1° le plan tangent ; 2° l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à S, le long des courbes $u = c$, ou $v = c$; 3° les lignes asymptotiques de S ; 4° les lignes de courbure ; 5° les rayons principaux en un point de S. (Grenoble, juillet 1907).

185. Un plan a pour équation

$$x \cos\theta \cos\varphi + y \cos\theta \sin\varphi + z \sin\theta = f(\theta).$$

Déterminer les coordonnées du point de contact de ce plan avec son enveloppe. Trouver les lignes de courbure de cette surface enveloppe. (Bordeaux, novembre 1906).

186. Déterminer les lignes de courbure de la surface représentée par les équations :

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \qquad y = 3v + 3u^2v - v^3, \qquad z = 3u^2 - 3v^2,$$

montrer que ce sont des cubiques situées dans des plans parallèles à OX, ou OY. (Caen, novembre 1907).

187. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface S, $z = x^2y$. 2° Soit L l'intersection de la surface S avec le plan tangent en un point M(a, b, c). Calculer la courbure de L en un point quelconque, en fonction de l'ordonnée y de ce point. 3° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface S, et déterminer les cosinus directeurs des directions principales en un point de l'axe ox. (Rennes, juillet 1909).

188. On donne la surface

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + u(z^2 - y^2) - u^2x = 0$$

où u est constant. On considère les droites Δ rencontrant les deux droites

$$D, \quad x = u, \quad z = 0, \qquad \text{et} \qquad D_1, \quad x = -u, \quad y = 0$$

aux points A et B, dont on représente les coordonnées par

$$y = 2v \qquad \text{et} \qquad z = 2w.$$

1° Une droite Δ rencontre la surface en un point ; donner ses coordonnées en fonction de v et de w.

2° On considère la normale en un point de la section par le plan $D\Delta$. Calculer l'angle de cette normale avec le plan.

3° Quel résultat peut-on en déduire pour les sections par les plan $D\Delta$, et de même par les plans $D_1\Delta$.

4° Montrer que ces sections sont des circonférences. (Besançon, juillet 1909).

189. On donne une famille de courbes C, dépendant d'un paramètre v, tracées sur un cylindre de révolution de rayon r, d'axe oz. Ces courbes passent par le point A de rencontre de ox avec le cylindre, leurs équations sont :

$$x = r \cos u, \qquad y = r \sin u, \qquad z = r\varphi(u, v).$$

On porte sur la tangente en un point M′ d'une courbe C un segment M′M tel que arc AM′ + M′M $= l$, où l est une constante donnée. Lorsque M′ décrit la courbe C, M décrit une développante de C ; lorsque C varie, cette développante D engendre une surface Σ.

1° Si les courbes C sont des hélices, trouver les coordonnées d'un point quelconque de Σ. Montrer que cette surface reste normale à M′M, trouver ses lignes de courbure, en déduire des générations simples de la surface.

2° Les courbes C étant quelconques, déduire des propriétés des développées que, pour que les développantes D soient lignes de courbure de la surface Σ, il faut, et il suffit, que la normale en M à la surface fasse un angle constant avec la direction MM′. (Rennes, juillet 1907).

190. Trouver les projections sur le plan xoy des lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique

$$x = a(u + v), \qquad y = b(u - v), \qquad z = cuv$$

où

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Poitiers, juillet 1903).

191. Déterminer les lignes de courbure de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}.$$

(Toulouse, juillet 1906).

CHAPITRE VIII

—

SURFACES RÉGLÉES

192. On a le plan P variable $18u^2x + y - 6uz = 3u^4$. Montrer que l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan P est une hélice. Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices de la développable, et montrer qu'elles sont dans des plans normaux aux génératrices du cylindre dont l'hélice précédente est une géodésique. (Caen, juillet 1908).

193. On considère les surfaces développables dont les génératrices font un angle donné α avec oz, et qui passent par la parabole $z = o$, $y^2 = 2px$. Montrer que ces surfaces sont des cylindres, excepté une surface développable S. Montrer que S est l'enveloppe des cylindres, et chercher géométriquement ses lignes de courbure. (Bordeaux, novembre 1909).

194. On donne les équations

$$x = \left(z + e^{\frac{\alpha^2}{2}}\right) \cos \alpha - v \sin \alpha, \quad y = \left(z + e^{\frac{\alpha^2}{2}}\right) \sin \alpha + v \cos \alpha,$$

où v est une fonction du paramètre α. Déterminer la fonction v de façon que la surface engendrée soit développable, et former les équations de l'arête de rebroussement. 2° Calculer les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface, et les dérivées partielles p, q, r, s, t de z ; vérifier que l'équation différentielle des surfaces développables est satisfaite ; 3° Déterminer les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux. (Grenoble, nov. 1910).

195. Une surface S est définie par les équations :

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad \varphi(z) = a\omega + f(\rho).$$

Déterminer la fonction φ de façon que le triangle omn, ayant pour sommets l'origine o, et les traces m et n, sur xoy, de l'ordon-

née d'un point M de S et de la normale en M, ait une aire proportionnelle à l'ordonnée z ; 2° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de S, et déterminer la fonction $f(\rho)$ par la condition que S soit une surface développable ; 3° Former les équations des génératrices et montrer qu'elles font un angle constant avec oz, et sont à une distance constante de cet axe. (Grenoble, novembre 1910).

196. Un cône de révolution autour de OZ a pour sommet l'origine, ses génératrices font l'angle α avec OZ. Par un point fixe de OX on mène une droite formant l'angle α avec OX, dans le plan XOY; et, par cette droite, un plan P parallèle à OZ, qui coupe le cône suivant une courbe c. Former l'équation de la surface engendrée par la courbe c lorsque α varie ; montrer que cette surface est réglée, chercher les trajectoires orthogonales de ses génératrices rectilignes. (Caen, juillet 1911).

197. Trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée. Former leur équation différentielle dans le cas général ; et, en particulier, pour un hyperboloïde à une nappe. Intégrer pour l'hyperboloïde de révolution. (Marseille, juillet 1909).

198. On considère les courbes c dont la tangente a pour paramètres directeurs αx, βy, γz. Ces courbes sont les solutions du système :

$$(1) \qquad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{\gamma z},$$

où α, β, γ sont constants. Démontrer que les courbes c sont les trajectoires orthogonales d'une famille à un paramètre de surfaces du second degré ; 2° Les courbes c qui rencontrent une courbe directrice D engendrent une surface S. Lorsque la directrice D est une droite, montrer que la surface S est réglée. Déterminer les droites D pour lesquelles la surface est développable. Déterminer les arêtes de rebroussement ; 3° Si la directrice D est une courbe, solution du système

$$(2) \qquad \frac{dx}{\alpha' x} = \frac{dy}{\beta' y} = \frac{dz}{\gamma' z}$$

analogue à (1), la surface S admet une seconde génération analogue. Trouver, dans ce cas, les lignes asymptotiques. Montrer que chacune des familles d'asymptotiques est formée de trajectoires ortho-

gonales d'une famille de quadriques, et que la surface S est orthogonale à une infinité de familles de quadriques. (Rennes juil. 1908).

199. On donne les droites :

$$x = tz + p, \quad y = pz + \frac{t^3}{3};$$

1° t et p étant indépendants, combien de droites réelles passent par un point de l'espace ; 2° Comment doit-on choisir p, fonction de t, pour que ces droites aient une enveloppe. Trouver alors l'arête de rebroussement de la surface, et la trace sur le plan xoy de la surface formée par ces droites. Lieu des arêtes de rebroussement. (Nancy, juillet 1906).

200. Trouver une courbe c, tracée sur le cylindre $y = x^n$, telle que le plan osculateur en chaque point M de la courbe passe par la projection P de M sur l'axe oy. On considère la surface engendrée par la droite MP quand M décrit la courbe c. Trouver les lignes asymptotiques de cette surface. (Dijon, novembre 1907).

201. Un paraboloïde S est représenté par les équations :

$$x = 2\lambda p \cos \varphi, \quad y = 2\lambda q \sin \varphi$$
$$z = 2\lambda^2(p \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi)$$

où p et q sont constants, λ et φ variables ; 1° Quelle relation doit exister entre λ et φ pour que la courbe c, tracée sur la surface S, soit telle que le plan tangent à S le long de cette courbe fasse un angle constant avec le plan xoy ; 2° Le plan tangent à S le long de c engendre une développable Σ, montrer que ses génératrices font un angle constant avec oz. Exprimer, en fonction de φ, les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement ; 3° Déterminer, sur la développable Σ, les courbes normales, en chaque point, à la génératrice de Σ qui passe en ce point. Montrer que ces courbes sont planes, et que leurs projections sur le plan des xy ont pour développée la projection de l'arête de rebroussement de Σ. (Bordeaux, novembre 1906).

202. On donne les deux paraboles

$$y = o, \quad (z - a)^2 = 2px$$

et

$$x = o, \quad (z - b)^2 = 2qy.$$

Les droites qui s'appuyent sur ces courbes dépendent de deux paramètres. Si on établit une relation convenable entres ces paramètres, elles engendrent une surface développable ; 1° Déterminer les surfaces ainsi obtenues ; 2° Il existe une de ces surfaces qui ne se réduit pas à un cône. Soit M un point de l'arête de rebroussement de cette surface S, P le point où le plan osculateur en M à cette arête de rebroussement coupe oz. Exprimer les coordonnées de M en fonction de la coordonnée z du point P, que l'on représentera par t ; 3° Le plan osculateur en M coupe le plan xoy suivant une droite Δ ; exprimer, en fonction de t, les coordonnées du point où la droite Δ touche son enveloppe ; 4° Que devient la surface développable S lorsque $a = b$. (Bordeaux, juillet, 1906).

203. Recherche de la ligne de striction d'une surface réglée dont les génératrices sont normales à une courbe donnée S. Cas des normales principales et des binormales. Si θ est l'angle de la génératrice qui coupe la courbe S en M avec la normale principale MN, on exprimera la distance MN du point central de la génératrice à M en fonction de θ et des coordonnées de M ; 2° Déterminer θ de façon que la surface, lieu des normales considérées, soit développable. (Grenoble, juillet 1906, pratique).

204. L'arête de rebroussement de toute surface développable circonscrite à une sphère est une ligne géodésique d'un cône concentrique à la sphère. C'est aussi une courbe enveloppe, sur le cône, d'une droite tangente au cône et à la sphère concentrique. Démontrer ces théorèmes en répondant aux questions suivantes :

1° Déterminer, par le coefficient angulaire m', la position limite de l'intersection du plan tangent à l'origine et du plan tangent voisin en un point satisfaisant à $y = mx$, la surface étant représentée par un développement en série entière :

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$

2° Cas où la surface est développable ;

3° L'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à une sphère de rayon R est une courbe c dont les tangentes touchent la sphère ; 4° Si l'on prend pour origine le centre de la sphère, la courbe c satisfait à l'équation différentielle

$$(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2 = R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

5° Une ligne géodésique d'un cône de sommet o satisfait à la même équation différentielle, où R a une valeur convenablement choisie ;

6° Conclusion. (Marseille, novembre 1903).

205. Une courbe c, située sur le paraboloïde $z = xy$, a pour projection, sur le plan xoy, un cercle de centre o. On mène le plan tangent au paraboloïde au point M de la courbe c. Montrer que, lorsque M décrit la courbe c, ce plan forme avec oz un angle constant. Trouver l'enveloppe de sa trace sur le plan xoy, l'arête de rebroussement de la surface développable qu'il enveloppe, et les développantes de cette arête de rebroussement. (Nancy, juil. 1903).

206. Sur la surface réglée

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = f(\theta)$$

où r et θ sont des paramètres variables, déterminer une courbe telle qu'en chacun de ses points la génératrice coupe sous un angle constant α l'une des deux lignes de courbure. Déterminer la projection de cette courbe sur le plan xoy, dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $f(\theta) = a \cos \theta$. (Caen, juillet 1911).

CHAPITRE IX

—

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

207. Déterminer une surface vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

et passant par la courbe $x = y$, $z = x^3$. Chercher les lignes asymptotiques de cette surface. (Besançon, novembre 1907).

208. Déterminer l'intégrale générale de l'équation :

$$2y\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2y = 0.$$

Déterminer la surface intégrale qui passe par la parabole $x = 0$, $y^2 = 2z$. Déterminer ses lignes asymptotiques. (Toulouse, novembre 1903).

209. Déterminer l'intégrale de l'équation

$$z(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

qui se réduit à $z = \sqrt{y}$ pour $x = 1$. (Caen, novembre 1907).

210. Intégrer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}x^n + \frac{\partial z}{\partial y}y^n = z^n,$$

où n est un nombre entier positif ou négatif. Déterminer la surface intégrale qui contient la droite $z = 1$, $x = y\sqrt{2}$. Examiner les cas particuliers $n = 0$ et $n = \pm 1$. Dans le cas $n = -1$, indiquer les lignes de courbure de la surface. (Marseille, juillet 1907).

211. Intégrer l'équation

$$2y(2a - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + z^2 - y^2 - 4ax)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0.$$

Montrer que les surfaces intégrales sont engendrées par des cercles ; calculer le cosinus de l'angle du plan tangent avec le plan du cercle générateur, et interpréter géométriquement le résultat obtenu. Déterminer la surface intégrale qui passe par la courbe $x = 0$,

$$z(y^2 + z^2) = \mathcal{E}a^3.$$

(Caen, juillet 1911).

212. Intégrer l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - a}},$$

où $a > 0$. Montrer que les surfaces intégrales sont réglées. Déterminer celle qui passe par la courbe $x = 2z$, $x^2 + y^2 = 4a^2$. Exprimer les coordonnées d'un point de cette surface S en fonction de u et v, en posant $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. Déterminer ses lignes asymptotiques et les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes. (Besançon, juillet 1911).

213. Intégrer l'équation

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = a.$$

2° Déterminer une surface intégrale admettant pour ligne de courbure sa section par le plan yoz.

3° Déterminer les deux systèmes de lignes de courbure de cette surface et ses rayons de courbure principaux. (Nancy, novembre 1909).

214. Intégrer l'équation

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2 ;$$

mode de génération des surfaces intégrales. Déterminer une surface intégrale passant par l'hyperbole $x = a$, $z^2 - y^2 = a^2$. (Caen, novembre 1909).

215. Intégrer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4z}{x - y}.$$

2° Montrer que les lignes asymptotiques des surfaces intégrales s'obtiennent par quadrature.

3° Déterminer toutes les surfaces intégrales admettant une ligne asymptotique qui se projette sur le plan xoy suivant une courbe donnée. Déterminer explicitement ces surfaces et leurs lignes asymptotiques dans le cas où la courbe donnée est $x - y = a$.

4° Déterminer les surfaces intégrales admettant comme ligne asymptotique la section par le plan $z = b$, où b est donné. (Dijon, juillet 1909).

216. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$2p \operatorname{ch} x + 2q \operatorname{sh} x - z \operatorname{sh} x = 0.$$

2° Déterminer la surface intégrale qui contient la droite $x = y = z$.

3° La surface intégrale qui contient la parabole

$$x = 0, \qquad z^2 = 2m(y - a).$$

4° Qu'arrive-t-il si l'on cherche à déterminer une surface intégrale passant par la chaînette

$$z = 0, \qquad y = \alpha \operatorname{ch} x.$$

(Lyon, juillet 1910).

217. Intégrer l'équation

$$px + qy = 2z.$$

2° Montrer que les lignes asymptotiques des surfaces intégrales s'obtiennent par une quadrature.

3° La fonction soumise à la quadrature contient un radical. Dans quel cas ce radical est-il constant.

4° Effectuer la quadrature dans le cas où la surface intégrale passe par la courbe

$$y = 2x^3, \qquad z = y.$$

5° Trouver les trajectoires orthogonales des projections sur le plan xoy des lignes asymptotiques de la surface précédente. (Lille, juillet 1910).

218. Intégrer l'équation $p^2y = z$. (Bordeaux, novembre 1909).

219. Déterminer la surface qui satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\delta z}{\delta x} + y \frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

et qui passe par un cercle donné dont le centre est sur ox, et dont le plan est perpendiculaire à ox. Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface. (Marseille, juillet 1905).

220. Intégrer l'équation :

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\frac{\delta z}{\delta x} + 2y(z - x)\frac{\delta z}{\delta y} = 0.$$

Mode de génération des surfaces intégrales. Déterminer celle de ces surfaces qui contient l'ellipse

$$x = 0, \qquad y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

et chercher ses lignes de plus grande pente, en supposant le plan xoy horizontal. (Caen, juillet 1904).

221. Intégrer l'équation

$$xy^2\frac{\delta z}{\delta x} + x^2y\frac{\delta z}{\delta y} = z(x^2 + y^2).$$

2° Déterminer une surface intégrale telle que les courbes caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques, et trouver la seconde famille.

3° Ces surfaces dépendent d'une constante arbitraire. Trouver l'équation générale des surfaces qui les coupent orthogonalement. (Paris, juillet 1904).

222. Intégrer l'équation

$$x(x^2 + y^2)\frac{\delta z}{\delta x} + 2y^2\left(x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} - z\right) = 0$$

et déterminer une surface intégrale passant par le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z = a.$$

(Grenoble, juillet 1904, pratique).

223. Intégrer l'équation

$$2xy\frac{\delta z}{\delta x} + (y^2 - x^2)\frac{\delta z}{\delta y} = 0.$$

Mode de génération des surfaces intégrales. Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la parabole $y = 0$, $z^2 = 2ax$, et trouver ses lignes asymptotiques. (Caen, juillet 1902).

224. Intégrer l'équation

$$2yz\frac{\delta z}{\delta x} - xz\frac{\delta z}{\delta y} + xy = 0.$$

2° Déterminer la surface intégrale S, qui passe par le cercle

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = y.$$

3° Déterminer les lignes de courbure de cette surface S. (Toulouse, novembre 1904).

225. Parmi les surfaces qui satisfont l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\delta z}{\delta x} + y\frac{\delta z}{\delta y} = 0,$$

déterminer celles qui satisfont aussi l'équation

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)^2 = \frac{a^2}{x^2 + y^2},$$

et déterminer leurs lignes de courbure. (Marseille, juillet 1906).

226. Montrer que l'équation

$$(z - px - qy)^2 + \frac{q}{yz} = 0$$

admet comme surfaces intégrales certaines quadriques, ayant pour axes les axes de coordonnées.

2° En déduire l'intégrale générale.

3° Déterminer la surface intégrale qui passe par la courbe

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

(Lille, juillet 1907).

227. Trouver l'intégrale de l'équation

$$p^2 - q^2 = 2z,$$

qui se réduit à $(1 + y)^2$ pour $x = 0$. (Caen, novembre 1903).

228. Intégrer l'équation :

$$p^2 - 2pq + 2q^2 = 4z$$

et déterminer une surface intégrale passant par la parabole $x = 0$, $2z = y^2$. (Toulouse, juillet 1905).

229. Intégrer l'équation

$$z - px - qy = p^3.$$

Signification géométrique des intégrales. (Toulouse, juillet 1902).

230. 1° Déterminer la fonction $f(x, y)$ telle qu'en éliminant a et b de l'équation

$$z = ax + by + f(x, y),$$

on obtienne

$$z = px + qy + f(x, y).$$

2° Trouver l'équation aux dérivées partielles du second ordre, indépendante de a, b et de la fonction F, à laquelle satisfait

$$z = ax + by + \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right).$$

3° Trouver la surface S la plus générale satisfaisant à l'équation

$$z = px + qy + a\frac{y}{x}$$

et la surface particulière Σ passant par la courbe

$$z = 0, \qquad x^3 + y^3 + 3axy = 0.$$

4° Chercher les projections sur le plan xoy des lignes asymptotiques de S et de Σ.

5° Dans ce cas on a des droites et des coniques. Trouver le cercle osculateur à l'une de ces coniques, le point de contact étant l'origine O. (Poitiers, juillet 1904).

231. Intégrer l'équation

$$pq = x + y.$$

Donner une méthode pour obtenir les surfaces intégrales qui passent par l'origine. (Lyon, novembre 1906).

232. Déterminer l'intégrale de l'équation

$$pq = xy,$$

qui se réduit à $\sqrt{1 + y^2}$ pour $x = 1$. (Caen, juillet 1905).

233. Intégrer l'équation

$$2z - px + qy + q^2 = 0.$$

(Toulouse, novembre 1900).

234. Intégrer l'équation

$$p^2 + q^2 = z^2.$$

(Poitiers, juillet 1909, pratique).

235. On considère le système

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} = A, \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta z \delta x} = B, \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = C$$

où A, B, C sont des fonctions connues de x, y, z. On demande quelles sont les conditions d'intégrabilité. Lorsqu'elles sont satisfaites, fixer l'économie des conditions initiales qui suffisent pour déterminer une intégrale. Calculer cette intégrale en faisant

$$A = y^2 + z^2, \qquad B = z^2 + x^2, \qquad C = x^2 + y^2.$$

(Caen, juillet 1908).

236. Que devient l'équation

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$

quand on remplace les variables x et y par z et θ, liées aux premières par les équations :

$$x = e^z \cos\theta, \qquad y = e^z \sin\theta$$

vérifier que, l'équation proposée étant vérifiée par

$$u = f(x + yi) + \varphi(x - yi),$$

l'équation transformée sera vérifiée par

$$u = f_1(z + \theta i) + \varphi_1(z - \theta i)$$

où f_1 et φ_1, de même que f et φ, sont des fonctions arbitraires. (Grenoble, juillet 1908, pratique).

237. On considère la fonction $f(\rho)$ où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1° Calculer, en fonction de ρ,

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta z^2}.$$

2° Evaluer l'intégrale triple

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dxdydz,$$

étendue au volume compris entre deux sphères de centre o, de rayons a et b.

3° Déterminer la fonction $f(\rho)$ de façon qu'elle satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{f(\rho)}{4(x^2 + y^2 + z^2)} = 0.$$

(Nancy, novembre 1907).

238. Trouver les surfaces $z = f(x, y)$ qui vérifient l'équation $p^2x + q^2y = 0$, et qui passent par la courbe $y = \varphi(z)$ du plan $x = 0$, qui vérifie l'équation

$$(z^2 - 3z + 2)\frac{dy}{dz} + 2y^2 - 3zy + 3z - 2 = 0$$

et qui contient le point $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. (Poitiers, novembre 1909, pratique).

239. Déterminer une surface passant par la parabole $x = 0$, $z^2 = 2ay\sqrt{2}$, et telle que ses coordonnées vérifient l'équation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{3a^2}{z^2}.$$

(Caen, juillet 1911).

240. On a l'équation

$$z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = a.$$

1° Trouver une intégrale complète et la solution singulière.

2° Une surface intégrale qui passe par une circonférence donnée dans un plan parallèle au plan xoy, dont le centre est sur oz.

3° Interpréter géométriquement les résultats. (Grenoble, juillet 1906, pratique).

CHAPITRE X

—

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

241. Trouver une surface S, passant par la parabole $x = R$, $y^2 = 2az$, telle que le plan tangent au point M coupe la projection de oM sur le plan xoy, à la distance constante R de l'origine. (Caen, juillet 1907).

242. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que la projection de l'ordonnée z d'un point quelconque sur la normale ait une longueur constante a; 2° Montrer qu'on peut considérer la surface S comme l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par l'équation :

$$x \cos u + y \sin u + f(u) = a\mathrm{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a}}{a};$$

3° Déterminer les lignes de courbure de S ; 4° Déterminer $f(u)$ de façon que la surface contienne le cercle $z = a$, $x^2 + y^2 = 2\lambda x$; 5° dans ce cas, ramener à une quadrature la recherche des lignes asymptotiques. (Marseille, juillet 1908).

243. Le plan tangent au point M d'une surface coupe oz au point P. La droite PM coupe le plan xoy en Q. Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que le point Q ait une abscisse donnée a. Démontrer que ces surfaces sont réglées ; 2° Déterminer celle des surfaces S qui contient le cercle $z = a$, $x^2 + y^2 = ax$; et les projections sur le plan xoy de ses lignes asymptotiques ; indiquer la forme de ces projections ; 3° Déterminer celle des surfaces S qui contient la droite $x = \frac{a}{2}$, $y + z = 0$. Cette

surface est du second degré, les génératrices rectilignes de l'un des systèmes rencontrent oz. Déterminer les projections, sur le plan xoy, des trajectoires orthogonales de ces génératrices. (Montpellier, juillet 1909).

244. Soit OP la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent en M à une surface, N le point où la normale coupe le plan XOY. Déterminer la surface telle que le produit $OP \times MN = OM^2$. Parmi ces surfaces, déterminer celles dont les sections passant par OZ sont des lignes de courbure. (Lille, juillet 1909).

245. Trouver et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que la droite oM et la normale en M à la surface forment un angle qui se projette sur le plan xoy suivant un angle droit; 2° Déterminer les lignes asymptotiques des surfaces S; 3° Soit A une aire prise sur S d'un même côté du plan xoy. Soit v le volume du cylindre projetant A sur le plan xoy et v' le volume du cône de sommet O limité à la même aire A. Démontrer que $v = 3v'$. 4° Déterminer celle des surfaces S qui contient la courbe $x = a$, $y = ae^{\frac{z}{a}}$, et calculer v en supposant que l'aire A se projette sur XOY à l'intérieur du triangle limité par les droites $x = 0$, $y = a$, $y = x$. (Montpellier, novembre 1909).

246. Le plan tangent au point M d'une surface coupe oz au point T, le plan xoy suivant la droite D.

1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S, telles que oT $= az$, où a est donné; 2° Intégrer l'équation obtenue et former l'équation générale des surfaces S; 3° Si P est la projection de M sur le plan xoy, montrer qu'il existe des surfaces intégrales telles que les droites D et oP forment un angle constant; 4° Déterminer les lignes asymptotiques de ces dernières surfaces. (Montpellier, juillet 1904).

247. Déterminer une surface telle que chaque point M soit le centre de gravité du triangle situé dans le plan tangent en M, et dont les sommets sont sur les trois axes de coordonnées. (Poitiers, juillet 1903).

248. Trouver une surface S telle que le plan tangent en M contienne le point symétrique par rapport à o du point de rencontre de la normale en M avec le plan xoy. On formera l'équation A que doit vérifier l'équation $z = f(x, y)$ de la surface; 2° Les cylindres

dont la section droite est une parabole de foyer o et de directrice parallèle à oz, sont des surfaces S ; 3° Indiquer une intégrale complète ; 4° Intégrer le système différentiel des caractéristiques de l'équation A. (Dijon, novembre 1910).

249. La normale au point $M(x, y, z)$ d'une surface coupe le plan xoy en N, le plan tangent coupe xoy suivant une droite D. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que la distance δ de N à la droite D soit une fonction donnée de z,

$$\delta = f(z);$$

2° Montrer qu'en prenant pour inconnue une certaine fonction Z de z, on peut ramener cette équation à la forme $P^2 + Q^2 = 1$, $P = \frac{\delta z}{\delta x}$, $Q = \frac{\delta z}{\delta y}$. Intégrer en appliquant cette remarque ; 3° Former l'équation différentielle des projections sur le plan xoy des trajectoires orthogonales des sections d'une surface S par les plans $z = c$. Intégrer cette équation et interpréter géométriquement le résultat. (Poitiers, juillet 1907).

250. Une surface S a pour équation $x^2 + y^2 = xf(z)$. On considère le volume limité par cette surface et les plans $z = 0$, $z = c > 0$. Indiquer les quadratures à effectuer pour calculer le volume de ce solide, les coordonnées du centre de gravité, le moment d'inertie par rapport à oz ; 2° Achever les calculs en supposant $f(z) = \sqrt{c^2 - z^2}$; 3° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S ; 4° Montrer que les plans tangents aux points d'une section $z =$ const. rencontrent oz au même point. (Rennes, juillet 1908, pratique).

251. La normale au point M d'une surface S coupe le plan xoy au point N, le point M se projette en P sur le plan xoy. Déterminer l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que $PN = a$ longueur constante ; 2° Trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles ; 3° Déterminer la bande caractéristique d'éléments linéaires (x, y, z, p, q) définie par un élément $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ dont les coordonnées satisfont à l'équation aux dérivées partielles. Quelle est la nature des courbes caractéristiques ; 4° Chercher l'équation du cône T, enveloppe des plans tangents aux surfaces intégrales qui passent par un point donné (x, y, z). En déduire l'équation aux différentielles totales des courbes inté-

grales; 5° Chercher la surface intégrale engendrée par les courbes caractéristiques issues du point $x = y = 0$, $z = h$; 6° Déterminer les deux surfaces intégrales qui passent par la droite $x = y = z$; 7° Chercher les courbes intégrales situées dans le plan $z = x$; et, en particulier, la courbe intégrale c, de ce plan, qui passe au point $x = z = a$, $y = 0$; 8° Déterminer la surface intégrale qui contient la courbe c. (Lyon, juillet 1911).

252. Former l'équation d'une surface passant par la parabole $x = b$, $y^2 = 2az$, et telle que le plan tangent au point M rencontre à une distance b de l'origine la droite qui joint cette origine à la projection de M sur le plan xoy. (Caen, juillet 1907).

253. Soit M un point d'une surface, m sa projection sur le plan xoy, N le point d'intersection du plan tangent en M avec la droite menée par o, perpendiculaire au plan ozM. 1° Déterminer l'équation générale des surfaces S telles que oN $= om$; 2° Parmi ces surfaces S déterminer celle qui passe par la courbe $y = 0$, $z^2 = 2x$; 3° Trouver les lignes asymptotiques de cette dernière surface. (Paris, novembre 1905).

254. Trouver l'équation générale des surfaces dont le plan tangent en M rencontre OZ en un point N tel que $\frac{\text{ON}}{\text{OM}}$ soit un rapport constant. Déterminer une surface particulière qui passe par une hélice donnée d'axe OZ. (Grenoble, novembre 1904, pratique).

255. Soit S une surface intégrale quelconque de l'équation

$$p^2 + q^2 = 2\text{U}(x, y), \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

où U est une fonction donnée de x et y.

1° Démontrer que les caractéristiques situées sur cette surface coupent orthogonalement les sections planes de la surface par des plans parallèles au plan xoy; 2° Les caractéristiques se projettent sur le plan xoy suivant une famille de courbes (7) dépendant de deux constantes arbitraires. Former l'équation différentielle du second ordre dont ces courbes (7) sont l'intégrale générale; 3° Déterminer la fonction U(x, y) de façon que les courbes (7) soient des circonférences orthogonales à l'axe des x; 4° Trouver une intégrale complète de l'équation obtenue, et une intégrale particulière se réduisant à zéro pour $x = 0$. (Paris, juillet 1905).

256. Trouver, sur un cylindre de révolution autour de oz, une

courbe c dont les tangentes rencontrent un cercle de centre c, situé dans le plan xoy ; 2° Rectifier un arc de la courbe c ; 3° Calculer l'aire de la portion de surface conique balayée par le rayon vecteur oM quand M décrit un arc de la courbe c ; 4° Déterminer une surface passant par la courbe c, et coupant orthogonalement les sphères tangentes en o au plan xoy. (Lille, novembre 1905).

257. Trouver les surfaces telles que le plan tangent en tout point M rencontre oz en un point équidistant de o et du point de contact M. (Marseille, novembre 1904).

258. La normale au point M d'une surface coupe le plan xoy en A. Ce point M se projette en P sur ce même plan xoy. 1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la bissectrice de l'angle AoP se confonde avec la bissectrice de l'angle des axes xoy ; 2° Intégrer cette équation, et former l'équation générale de ces surfaces ; 3° Déterminer la surface particulière S, qui passe par la circonférence $x = y$,

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + z^2 = 4a^2 ;$$

4° Déterminer les lignes de courbure de cette surface ;

5° Montrer que les lignes de courbure de chaque système sont des circonférences, qui passent par deux points fixes. (Montpellier, juillet 1907).

259. La normale au point M d'une surface coupe le plan xoy en P. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que PM = PO ; 2° Intégrer cette équation, et former l'équation générale de ces surfaces ; 3° Déterminer les lignes de courbure de l'une de ces surfaces, et montrer que celles d'un système sont des circonférences dans des plans passant par oz ; 4° Montrer que, pour chaque surface, le point P décrit une courbe du plan xoy, qui peut être arbitraire, et déterminer la surface pour laquelle cette courbe a pour équation $y = ae^{-x}$. (Montpellier, juillet 1902).

260. On considère les sphères tangentes au plan xoz, aux divers points de l'axe oz.

1° Montrer qu'elles satisfont à une même équation aux dérivées partielles du premier ordre (E).

2° Indiquer la génération de la surface intégrale la plus générale de l'équation (E), et ses caractéristiques.

3° Déterminer la surface intégrale qui passe par le cercle

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 - 2y = 0.$$

4° Démontrer que la section, par tout plan passant par oz, de toute surface intégrale est une ligne de courbure de cette surface. Quelles sont les autres lignes de courbure. (Nancy, juillet 1909).

261. On considère les sphères tangentes au plan xoy, qui ont leurs centres (x, y, z) sur une surface donnée. Elles enveloppent une surface S, lieu d'un point (X, Y, Z).

1° Calculer les cosinus directeurs de la normale au point M à la surface S, au moyen de x, y, z, p, q.

2° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$X(x, y, z, p, q) = c$$

où X est l'abscisse du point M. (Intégrale complète, intégrale générale).

3° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface qui représente l'intégrale générale. (Toulouse, juillet 1909).

262. Déterminer les surfaces telles que, en un point quelconque, les deux tangentes principales d'une part, les deux directions principales d'autre part, se projettent sur le plan xoy suivant deux angles ayant leurs bissectrices parallèles à ox et oy. Lignes de courbure de ces surfaces. (Bordeaux, juillet 1906).

263. Trouver les surfaces telles que la normale forme avec oz un angle V :

$$\cos V = \frac{z}{a}.$$

(Bordeaux, novembre 1903).

264. Déterminer une surface S telle que, si un point M de S se projette en P sur le plan xoy, et en Q sur l'axe oz, le plan tangent en M soit parallèle à la droite PQ.

2° Chercher si, parmi ces surfaces, il y en a qui sont de révolution autour de oz.

3° Trouver une surface S qui passe par la courbe

$$z = 1, \qquad y = x\mathrm{L}x.$$

4° Trouver les lignes asymptotiques de cette dernière surface. (Montpellier, juillet 1906).

265. Déterminer une surface passant par la parabole

$$x = 0, \qquad y^2 - 4az + 8a^2 = 0$$

et telle que, si l'on projette un de ses points M sur le plan xoy en M′, puis M′ en M″ sur le plan tangent en M, le z de M″ soit égal à a quelque soit M. (Caen, juillet 1906).

CHAPITRE XI

—

DIFFÉRENTIELLES TOTALES

266. Vérifier que l'équation

$$(z + \sin y)z \sin y \cos x\, dx + (z + \sin x)z \sin x \cos y\, dy + \\ + (\sin x + \sin y) \sin x \sin y\, dz = 0$$

est une équation aux différentielles totales exactes. Intégrer cette équation. (Besançon, juillet 1909, pratique).

267. Montrer qu'on peut, par un changement de variable, réduire la différentielle totale

$$(2xz^2 + x^2 + yz)dx - z(z^2 + x)dy + (z^2y - 2zx^2 - xy)dz.$$

En déduire l'intégrale de l'équation obtenue en l'égalant à zéro. (Bordeaux, juillet 1909).

268. Intégrer l'équation :

$$3(2y - 3z)(8yz - x^2)dx + 12x(x^2 + 4z^2)dy - 2x(9x^2 + 16y^2)dz = 0.$$

(Grenoble, juillet 1909, pratique).

269. Vérifier que la condition d'intégrabilité est satisfaite pour l'équation aux différentielles totales

$$(yz + a^2)\frac{dx}{x} + (xz + a^2)\frac{dy}{y} - (x + y)dz = 0.$$

2° Intégrer cette équation.

3° Déterminer une fonction $\lambda(x, y, z)$ telle que le premier membre, multiplié par λ, devienne une différentielle exacte. (Rennes, juillet 1907, pratique).

270. On considère l'équation aux différentielles totales

$$dz = (Az^2 + 2Bz + C)dx + (A_1z^2 + 2B_1z + C_1)dy$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 sont des fonctions des variables indépendantes x *et* y.

1° Former les conditions que doivent vérifier ces six fonctions pour que l'équation soit complètement intégrable.

2° Ces conditions étant satisfaites, comment achèvera-t-on l'intégration si on connaît une ou plusieurs intégrales particulières.

3° *Exemple.* — Etant donnée une famille de courbes C représentées par les équations :

$$x^2 - 2z^2 = a, \qquad 5y^3 - 5x^2z^3 + mx^3z + 4z^5 = b$$

où a et b sont des paramètres arbitraires, et m un coefficient constant, déterminer m de façon que les courbes C soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces et trouver cette famille. (Paris, juillet 1907).

271. Intégrer l'équation :

$$(y - z)(3yz - x^2)dx + 2x(x^2 + z^2)dy - 2x(x^2 + y^2)dz = 0$$

(Grenoble, novembre 1908, pratique).

272. On considère l'expression :

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\right)dx + \left(x\frac{\partial z}{\partial y} + x - 2xy + 2yf'(z - x)\right)dy$$

où z est une fonction des variables indépendantes x et y, et $f'(z - x)$ la dérivée d'une fonction f donnée de la variable $z - x$.

1° Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier z pour que cette expression soit une différentielle exacte.

2° Déterminer l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles qui, pour $x = 0$, se réduit à y^2 ; montrer qu'elle est indépendante de la fonction f ; intégrer la différentielle obtenue, si z est cette fonction particulière. (Toulouse, novembre 1906).

273. Déterminer la fonction z des deux variables indépendantes x et y, de manière :

1° Que $zdx + z^2dy$ soit une différentielle exacte :

2° Que z se réduise à $\sqrt{x}$, pour $y = 0$. La fonction z étant déterminée, intégrer cette différentielle. (Nancy, novembre 1905).

274. Deux surfaces S et S_0 se correspondent point par point de façon que les normales aux points correspondants (x, y, z) (x_0, y_0, z_0)

soient parallèles, et qu'on ait, entre les différentielles des coordonnées, les relations

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2$$
$$dxdx_0 + dydy_0 + dzdz_0 = 0.$$

1° Montrer que z, regardé comme fonction de x et y, vérifie une seule équation aux dérivées partielles du second ordre, qu'on formera, et dont on indiquera la signification géométrique.

2° Chercher si la surface S peut être de révolution, trouver sa méridienne. Déterminer la surface S_0 correspondante.

3° Montrer que les lignes de courbure de S correspondent aux lignes asymptotiques de S_0 et réciproquement. Trouver ces lignes. (Toulouse, juillet 1908).

CHAPITRE XII

—

FONCTIONS ELLIPTIQUES

275. Réduction de l'intégale

$$u = \int \frac{dx}{(x-3)^3\sqrt{X}} \quad \text{où} \quad X = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120.$$

(Grenoble, novembre 1903, pratique).

276. Former l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'hélicoïde engendré par une droite qui rencontre constamment une hélice circulaire donnée, ainsi que son axe, et reste perpendiculaire à cet axe. Montrer qu'on peut l'intégrer par les fonctions elliptiques. (Dijon, novembre 1907).

277. On pose

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+1)(3x^2+x+1)}}.$$

Calculer x en fonction de u, en employant les fonctions sn et cn. (Bordeaux, juillet 1904).

278. Soit

$$y^2 = X = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

on pose :

$$y_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{X}}, \qquad z_n = \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{X}}.$$

Exprimer y_2 et y_3 en fonction de y_0 et y_1 ; puis z_2 en fonction de z_1, y_0, y_1, en distinguant les deux cas où a est, ou n'est pas, zéro de X.

En posant

$$x = p(u), \qquad y = p'(u),$$

quelles formules en déduit-on relativement aux fonctions elliptiques. (Lyon, juillet 1910, pratique).

279. Exprimer $p(2u)$ en fonction de $p(u)$.

2° On donne $p(u) = a$, calculer $p\left(\frac{u}{2}\right) = t$. Interpréter géométriquement la signification des racines de l'équation en t obtenue, en utilisant la cubique

$$x = p(u), \qquad y = p'(u).$$

3° Soient 2ω et $2\omega'$ les périodes de la fonction elliptique $p(u)$, on suppose ω et $\frac{\omega'}{i}$ réels et positifs, et a réel ; à quelle condition les 4 racines de l'équation en t sont-elles réelles? Si $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ sont ces 4 racines, et si $t_\alpha = p(v_\alpha)$, déterminer v_1, v_2, v_3, v_4, v étant un nombre tel que $p(v) = a$.

4° Si e_1 est le plus grand zéro du polynôme $4z^3 - g_2 z - g_3$, où g_2 et g_3 sont les invariants relatifs à $p(u)$, on suppose, en particulier, $a = e_1$. Etudier ce cas spécial, et calculer

$$p\left(\frac{\omega}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right).$$

(Lyon, novembre 1910).

SOLUTIONS

CHAPITRE PREMIER

QUADRATURES

1. On a :

$$1 + 2x + 2x^2 = \frac{1 + (2x + 1)^2}{2}.$$

Si on pose : $2x + 1 = y$, on aura :

$$\frac{x(1 + x)dx}{(1 + 2x + 2x^2)^2} = \frac{y^2 - 1}{2(1 + y^2)^2}\, dy = d\left(\frac{-y}{2(1 + y^2)}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{x(1 + x)}{(1 + 2x + 2x^2)^2}\, dx = \left(-\frac{2x + 1}{4(1 + 2x + 2x^2)}\right)_0^\infty = \frac{1}{4}.$$

2. On peut poser :

$$\frac{x^2 + px + q}{(x - 1)^3(x + 2)^2} = \frac{A}{(x - 1)^3} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x + 2)^2} + \frac{E}{x + 2}.$$

Si on multiplie par $(x - 1)^3$, et si on pose $x = 1$, le second membre se réduit à A, qui est égal à la valeur de

$$\frac{x^2 + px + q}{(x + 2)^2}, \quad \text{pour } x = 1\,; \quad A = \frac{1 + p + q}{9}.$$

De même, en multipliant par $(x + 2)^2$, et posant $x = -2$, on a :

$$D = \frac{2p - q - 4}{27}.$$

En chassant les dénominateurs, la première identité devient :

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = {} & A(x^2 + 4x + 4) + B(x^3 + 3x^2 - 4) + \\ & + C(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) + D(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ & + E(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2). \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des puissances de x dans les deux membres, et tenant compte de $E = -C$, on a :

$$C + E = 0, \quad B + 3C + D = 0, \quad A + 3B - 3D = 1$$
$$4A - 9C + 3D = p, \quad 4A - 4B + 6C - D = q.$$

En remplaçant A et D par les valeurs déjà calculées, on trouve successivement :

$$B = D + \frac{1 - A}{3} = \frac{p - 2q + 4}{27}, \quad C = -\frac{B + D}{3} = \frac{q - p}{27}$$

$$27\,\frac{x^2 + px + q}{(x-1)^3(x+2)^2} = 3\,\frac{1 + p + q}{(x-1)^3} + \frac{4 + p - 2q}{(x-1)^2} + \frac{q - p}{x - 1} + \\ + \frac{2p - q - 4}{(x+2)^2} + \frac{p - q}{x + 2}.$$

L'intégrale est algébrique si les termes $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{x+2}$, qui donneraient des logarithmes, disparaissent, c'est-à-dire si $q = p$. On a alors :

$$\int \frac{x^2 + p(x+1)}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx = \frac{1}{27}\left(-3\,\frac{1 + 2p}{2(x-1)^2} + \frac{p - 4}{x - 1} - \frac{p - 4}{x + 2}\right) = \\ = \frac{1}{9}\left(-\frac{1 + 2p}{2(x-1)^2} + \frac{p - 4}{(x-1)(x+2)}\right) = \frac{2 - 2p - 3x}{6(x-1)^2(x+2)}.$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{[x^2 + p(x+1)]dx}{(x-1)^3(x+2)^2} = \left(\frac{2 - 2p - 3x}{6(x-1)^2(x+2)}\right)_{-1}^{0} = \\ = \frac{1 - p}{6} - \frac{5 - 2p}{24} = \frac{-1 - 2p}{24}.$$

3. On a :

$$f(x) = \frac{x^2 + 6(a+1)x + 9a + 8}{(x+3)^2(ax^2 + 1)} = \frac{M}{P} + \frac{N'Q - NQ'}{Q^2}$$

où

$$Q = x + 3, \quad P = (ax^2 + 1)(x + 3),$$

Q étant du premier degré, N est une constante, $N' = 0$; et l'on a l'identité :

$$M(x+3) - N(ax^2+1) = (x+3)^2 - 1 + 3a(2x+3).$$

Si $x = -3$, on trouve $N = 1$;

$$M(x+3) = ax^2 + 1 + (x+3)^2 - 1 + 3a(2x+3) = (a+1)(x+3)^2$$

$$f(x) = \frac{a+1}{ax^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+3}\right),$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{x+3} + \frac{a+1}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{a}\right), \quad a > 0.$$

Si $a < 0$, $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{x+3} + \frac{a+1}{2\sqrt{-a}} \mathrm{L}\,\frac{1 + x\sqrt{-a}}{1 - x\sqrt{-a}}$.

L'intégrale est algébrique si le terme $\dfrac{a+1}{ax^2+1}$, de $f(x)$, disparaît, ou conduit à une intégrale algébrique, ce qui a lieu dans les deux cas suivants :

Si $a = -1$, $\displaystyle\int -\frac{dx}{(x+3)^2} = \frac{1}{x+3}$.

Si $a = 0$, $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{(x+3)^2}\right)dx =$

$$= x + \frac{1}{x+3}.$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ est infinie, car, si x est voisin de zéro, elle est de l'ordre de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8} = \frac{-1}{7x^7}$, qui ne reste pas fini. D'une façon plus précise, si $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^8} = \frac{1}{7\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\varepsilon^7} - 1\right),$$

qui devient infini, si $\varepsilon = 0$.

D'autre part, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}} < \int_1^\infty \frac{dx}{x^8\sqrt{2}} = \frac{1}{7\sqrt{2}}$.

Si on pose $x = \operatorname{tg} t$, puis $\sin t = y$, on a :

$$\int \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dt}{\cos t \operatorname{tg}^8 t} = \int \frac{(1-\sin^2 t)^3}{\sin^8 t} \cos t dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{y^8} - \frac{3}{y^6} + \frac{3}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{-1}{7y^7} + \frac{3}{5y^5} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y}$$

et comme $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$\int \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x^7}\sqrt{1+x^2}\left(-\frac{(1+x^2)^3}{7} + \frac{3}{5}x^2(1+x^2)^2 -\right.$$

$$\left. - x^4(1+x^2) + x^6\right) = \frac{1}{35x^7}\sqrt{1+x^2}\,(16x^6 - 8x^4 + 6x^2 - 5).$$

Pour $x = \infty$, cette fonction a la même limite que

$\dfrac{16}{35}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}$, ou $\dfrac{16}{35}$. Pour $x = 1$ elle est égale à $\dfrac{9}{35}\sqrt{2}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}} = \frac{16 - 9\sqrt{2}}{35} = 0{,}093488\ldots$$

5. Pour $x = 1$, $x - \sqrt{2x-1}$ devient nul, de sorte que le facteur $x - 1$ reste au dénominateur à une puissance inférieure à 1, et l'intégrale a une valeur finie.

En posant $\sqrt{2x-1} = y$, puis $y - 1 = 2z^3$, on a :

$$\int_1^{13} \sqrt[3]{x - \sqrt{2x-1}}\,\frac{dx}{x-1} = \int_1^5 \sqrt[3]{\frac{1+y^2}{2} - y}\,\frac{2ydy}{y^2-1} =$$

$$= \sqrt[3]{4}\int_1^5 \frac{ydy}{(y+1)\sqrt{y-1}} = 3\sqrt[3]{2}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{1+2z^3}{1+z^3}\,zdz =$$

$$= \sqrt[3]{2}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(6z + \frac{1}{1+z} - \frac{2z-1}{2(1-z+z^2)} - \frac{6}{3+(2z-1)^2}\right)dz =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left[3z^2 + \mathrm{L}(1+z) - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1-z+z^2) - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= 6 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\mathrm{L}\frac{(1+\sqrt[3]{2})^3}{3} - \sqrt[3]{2}\sqrt{3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 6 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\mathrm{L}\frac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt{2}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

On peut calculer la valeur numérique de l'intégrale, en la mettant sous la forme :

$$I = 3\sqrt[3]{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(2z - \frac{z}{1+z^3}\right)dz = 6 - 3\sqrt[3]{2}\int_0^{\sqrt[3]{2}}\frac{z}{1+z^3}\,dz.$$

Si $z < 1$, on pourrait développer suivant les puissances de z, ce qui conduit à séparer l'intégrale en deux parties. Si on pose $z = {}_t$, on a :

$$\int_1^{\sqrt[3]{2}}\frac{zdz}{1+z^3} = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\frac{dt}{1+t^3}$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{2}}\frac{zdz}{1+z^3} = \int_0^1\frac{zdz}{1+z^3} + \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\frac{dz}{1+z^3} =$$

$$= \int_0^1\frac{1+z}{1+z^3}\,dz - \int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\frac{dz}{1+z^3}$$

$$I = 6 - 3\sqrt[3]{2}\int_0^1\frac{4dz}{3+(2z-1)^2} + 3\sqrt[3]{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\frac{dz}{1+z^3}$$

$$\int_0^1\frac{4dz}{3+(2z-1)^2} = \int_{-1}^{1}\frac{2dy}{3+y^2} = \frac{4}{3}\int_0^1\left(1 - \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{3^2}\cdots\right)dy =$$

$$= \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \cdots\right)$$

$$\sqrt[3]{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\frac{dz}{1+z^3} = \sqrt[3]{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}(1 - z^3 + z^6\cdots)\,dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2^2.7} - \frac{1}{2^3.10} + \cdots$$

$$I = 6 - 4\sqrt[3]{2}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \frac{1}{11.3^5} + \cdots\right)$$
$$+ 3\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{7.2^2} - \frac{1}{10.2^3} + \frac{1}{13.2^4} - \frac{1}{16.2^5} + \frac{1}{19.2^6}\cdots\right)$$
$$= 4.147;$$

6 termes de la première série, et 8 de la seconde, suffisent pour cette approximation.

6. Il faut $a^2 > 1$, pour que I_n soit fini, de façon que $a - x$ ne s'annule pas entre $x = -1$ et $+1$. On peut supposer $a > 1$;

car, en changeant x en $-x$, on a :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(a-x)^{n+1}}\,dx = \int_{1}^{-1} \frac{-(1-x^2)^n}{(a+x)^{n+1}}\,dx =$$
$$= (-1)^{n+1} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(-a-x)^{n+1}}\,dx$$

le cas où $a < -1$ se ramène ainsi à celui où $a > 1$.

Supposons donc $a > 1$. Soit :

$$y = \frac{1-x^2}{2(a-x)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-2ax+x^2}{2(a-x)^2},$$

cette dérivée s'annule, entre 0 et 1, pour $x = b = a - \sqrt{a^2-1}$, pour cette valeur

$$y = \frac{1-b^2}{2(a-b)} = \frac{1-a^2+a\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}} = b.$$

Lorsque x varie de -1 à b, y augmente de 0 à b. Si x varie de b à $+1$, y diminue de b à 0. Inversement, on a :

$$x^2 - 2xy + 2ay - 1 = 0,$$
$$x = y \pm \sqrt{y^2 - 2ay + 1}.$$

Si y augmente de 0 à b, la valeur $y + \sqrt{y^2-2ay+1}$ diminue de 1 à b. La valeur $y - \sqrt{y^2-2ay+1}$ augmente de -1 à b.

$$\frac{dx}{a-x} = 2\,\frac{a-x}{1-2ax+x^2}\,dy = 2\,\frac{a-x}{2x^2-2ax+2y(a-x)}\,dy =$$
$$= \frac{dy}{y-x} = \frac{dy}{\pm\sqrt{y^2-2ay+1}}$$

y reste compris entre 0 et b ; on a le signe $-$ si $b < x < 1$, et le signe $+$ si $-1 < x < b$.

$$\int_{-1}^{b} \left(\frac{1-x^2}{a-x}\right)^n \frac{dx}{a-x} = \int_0^b (2y)^n \frac{dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}}$$

$$\int_{b}^{1} \left(\frac{1-x^2}{a-x}\right)^n \frac{dx}{a-x} = \int_b^0 (2y)^n \frac{dy}{-\sqrt{y^2-2ay+1}}$$

$$I_n = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x^2}{a-x}\right)^n \frac{dx}{a-x} = 2\int_0^b (2y)^n \frac{dy}{\sqrt{y^2-2ay+1}}$$

$$I_n - 2aI_{n-1} = 4\int_0^b (2y)^{n-1} \frac{y-a}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy$$

en intégrant par parties, on a :

$$\int y^{n-1}\frac{y-a}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy = y^{n-1}\sqrt{y^2-2ay+1} -$$
$$-(n-1)\int y^{n-2}\sqrt{y^2-2ay+1}\,dy$$

le radical s'annule pour $y=b$. Si $n>1$, le premier terme est nul aux deux limites 0 et b.

$$\int_0^b y^{n-1}\frac{y-a}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy = (1-n)\int_0^b \frac{y^n-2ay^{n-1}+y^{n-2}}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy$$
$$I_n - 2aI_{n-1} = 2(1-n)\int_0^b \frac{(2y)^n-4a(2y)^{n-1}+4(2y)^{n-2}}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy =$$
$$= (1-n)\,(I_n - 4aI_{n-1} + 4I_{n-2}).$$
$$nI_n - 2a(2n-1)I_{n-1} + 4(n-1)I_{n-2} = 0.$$

En particulier :

$$3I_3 = 10aI_2 - 8I_1,$$
$$2I_2 = 6aI_1 - 4I_0,$$
$$3I_3 = 2(15a^2-4)I_1 - 20aI_0.$$

Pour $n=1$, on aura :

$$I_1 - 2aI_0 = 4\int_0^b \frac{y-a}{\sqrt{y^2-2ay+1}}\,dy = 4\left(\sqrt{y^2-2ay+1}\right)_0^b = -4$$
$$I_0 = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{a-x} = \left(-L(a-x)\right)_{-1}^{1} = L\frac{a+1}{a-1}$$
$$3I_3 = 8(4-15a^2) + 12a(5a^2-3)L\frac{a+1}{a-1}$$
$$I_3 = \frac{32}{3} - 40a^2 + 4a(5a^2-3)L\frac{a+1}{a-1}.$$

7. En posant $x = \cos\varphi + z\sin\varphi$ on a :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\varphi}} = \int\frac{dx}{\sqrt{\sin^2\varphi+(x-\cos\varphi)^2}} = \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} =$$
$$= L(z+\sqrt{1+z^2}) = L(x-\cos\varphi+\sqrt{1+x^2-2x\cos\varphi}) - L\sin\varphi$$
$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\varphi}} = L\,\frac{1-\cos\varphi+\sqrt{2(1-\cos\varphi)}}{-1-\cos\varphi+\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} =$$
$$= L\frac{\sin\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}} = L\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\pi-\varphi}{4}}{2\cos\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{4}} = L\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi-\varphi}{4}\right) =$$
$$= L\operatorname{cotg}8^\circ 11'30'' + L\operatorname{cotg}36^\circ 48'30''$$

on trouve, dans les tables, les logarithmes de base 10 :

$$\log \operatorname{cotg} 8^\circ 11' 30'' = 0{,}84178$$
$$\log \operatorname{cotg} 36^\circ 48' 30'' = 0{,}12591$$
$$\log\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{4}\operatorname{cotg}\frac{\pi-\varphi}{4}\right) = \overline{0{,}96769}$$

et, pour les logarithmes de base e :

$$\frac{\mathrm{L}a}{\log a} = \mathrm{L}10 = \frac{1}{\log e} = 0{,}2302585$$
$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}} = 2{,}20516.$$

8. En posant

$$x = \frac{1}{1+z^2}, \qquad \frac{1-x}{x} = z^2,$$

on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}} = \int_\infty^0 \frac{-2(1+z^2)}{1-4(1+z^2)^2}\,dz =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+2z^2}+\frac{1}{3+2z^2}\right)dz =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arc\,tg}(z\sqrt{2})+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(z\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)_0^\infty = -\pi\,\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}.$$

Pour calculer la valeur numérique, on peut développer $\frac{1}{4-x^2}$ suivant les puissances de x, ce qui donne :

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{-dz}{2(1+z^2)\left(1-\frac{1}{4(1+z^2)^2}\right)} =$$
$$= -\int_0^\infty\left(1+\frac{1}{4(1+z^2)^2}+\frac{1}{4^2(1+z^2)^4}+\ldots\right)\frac{dz}{2(1+z^2)}.$$

Mais

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} = \frac{z}{(1+z^2)^{n-1}} + (n-1)\int\frac{2(z^2+1)-2}{(1+z^2)^n}\,dz$$
$$\int_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{I} = -\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{4^2}+\ldots\right) = -\frac{\pi}{4}\cdot 1{,}1154 = -0{,}8760.$$

les 5 premiers termes de la série suffisent pour cette approximation.

9. En intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{x\mathrm{L}x}{(1+x^2)^3}\,dx = \int \frac{\mathrm{L}x}{4}\,d\left(\frac{-1}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{\mathrm{L}x}{4(1+x^2)^2} + \int \frac{dx}{4x(1+x^2)^2}$$

et

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2}\,xdx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) xdx = \mathrm{L}x - \frac{1}{2}\mathrm{L}(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\int \frac{x\mathrm{L}x}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{1}{8}\,\mathrm{L}\,\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\mathrm{L}x}{4(1+x^2)^2}.$$

Pour $x = \infty$, cette fonction tend vers zéro, car $\frac{\mathrm{L}x}{x}$ tend vers zéro. On peut aussi la mettre sous la forme :

$$\frac{1}{8(1+x^2)} + \frac{2x^2+x^4}{4(1+x^2)^2}\,\mathrm{L}x - \frac{1}{8}\,\mathrm{L}(1+x^2)$$

et, pour $x = 0$, elle devient égale à $\frac{1}{8}$, car $x\mathrm{L}x$ tend vers zéro. Donc :

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{L}x}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{8}.$$

10. On peut considérer $\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ comme une différentielle, pour intégrer partie.

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right) xdx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$$

$$\int \mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) d\left(\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\right) =$$

$$= -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{3}\int \frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Bien que $\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}$ devienne infini pour $x = \pm 1$, le produit

$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}$ tend vers zéro. Donc :

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{L}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

En posant $x=\sin t$, on a :

$$\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin^2 t)dt=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5-\cos 2t)dt=\frac{1}{3}\left(10t-\sin 2t\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5\pi}{3}.$$

11. La formule de Moivre

$$(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x$$

donne :

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$$\frac{\cos 3x}{2+\cos x}=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{2+\cos x}=4\cos^2 x-8\cos x+13-\frac{26}{2+\cos x}=$$

$$=15-8\cos x+2\cos 2x-\frac{26}{3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\int\frac{\cos 3x}{2+\cos x}dx=15x-8\sin x+\sin 2x-\frac{52}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Si x varie de o à π, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ varie de o à ∞, et $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ varie de o à $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos 3x}{2+\cos x}dx=\pi\left(15-\frac{26}{\sqrt{3}}\right).$$

12.

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(4\cos x+5)^2}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(9\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dy}{(9\cos^2 y+\sin^2 y)^2}=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\operatorname{tg}^2 y}{(9+\operatorname{tg}^2 y)^2}\cdot\frac{dy}{\cos^2 y}=2\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{(9+x^2)^2}dx=2\int_0^{\infty}\frac{1+9x^2}{9^2(1+x^2)^2}3dx=$$

$$=\frac{2}{27}\int_0^{\infty}\left(\frac{5}{1+x^2}-4\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx=\frac{2}{27}\left(5\operatorname{arc\,tg}x-\frac{4x}{1+x^2}\right)_0^{\infty}=\frac{5\pi}{27}.$$

13. Posons :

$$\frac{4}{5}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y, \qquad \frac{4}{5}\left(1 + \frac{25}{16}\operatorname{tg}^2 y\right)dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

$$\int\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx = \int\sqrt{\frac{25}{16}+\operatorname{tg}^2 x}\,dx = \int\frac{25}{16\cos^2 y+25\sin^2 y}\cdot\frac{dy}{\cos y} =$$

$$= \int\frac{25\cos y\,dy}{(16+9\sin^2 y)(1-\sin^2 y)} = \int\left(\frac{9}{16+9\sin^2 y}+\frac{1}{1-\sin^2 y}\right)\cos y\,dy =$$

$$= \frac{3}{4}\int\frac{\frac{3}{4}\,d\sin y}{1+\left(\frac{3}{4}\sin y\right)^2}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin y}+\frac{1}{1-\sin y}\right)d\sin y =$$

$$= \frac{3}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{4}\sin y\right)+\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sin y}{1-\sin y}.$$

Lorsque x varie de o à $\frac{\pi}{4}$, tg y varie de o à $\frac{4}{5}$, et $\sin y$ de o à $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{\sqrt{41}}+\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{41}+4}{\sqrt{41}-4}.$$

14. Si $z = \rho e^{\omega i}$, et si $zf(z)$ tend vers zéro, pour $\rho = \infty$, lorsque $0 \leqq \omega \leqq \pi$. L'intégrale

$$\int f(z)dz = \int_0^{\pi} zf(z)i\,d\omega,$$

prise sur un demi-cercle de rayon ρ, de centre o, tend vers zéro, pour $\rho = \infty$. Si $f(z)$ est une fonction uniforme, n'ayant pas d'autres points singuliers que des pôles, il résulte du théorème de Cauchy que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\Sigma\mathrm{R},$$

où $\Sigma\mathrm{R}$ est la somme des résidus des pôles de $f(z)$ situés au-dessus de l'axe réel ; c'est-à-dire la somme des coefficients de $\frac{1}{z-z_0}$ dans le développement correspondant à chaque pôle $z = z_0$. La fonction $\frac{1}{1+z^4}$ remplit ces conditions, elle a 4 pôles

$$z^4 = -1 = e^{(2\mathrm{K}+1)\pi i}, \qquad z = e^{\frac{2\mathrm{K}+1}{4}\pi i},$$

où K = 0, 1, 2, 3. Il y en a deux au-dessus de l'axe réel : $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$ et $e^{3\frac{\pi i}{4}}$. Soit $z = z_0$ un de ces pôles, qui sont simples :

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{A}{z-z_0} + A_0 + A_1(z-z_0) + \ldots$$

A est la valeur de $\frac{z-z_0}{1+z^4}$, pour $z = z_0$; et, d'après la règle de l'Hospital : $A = \frac{1}{4z_0^3} = -\frac{z_0}{4}$, puisque $z_0^4 = -1$

$$\Sigma R = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)e^{\frac{\pi i}{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\,2\pi i = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

On peut également arriver au résultat par la décomposition en fractions simples :

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+x}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \frac{\sqrt{2}-x}{1-x\sqrt{2}+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} - \frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right].$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,dx$$

car on peut poser $x = y - \frac{2}{\sqrt{2}}$ et les variables x, $x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ varient en même temps de $-\infty$ à $+\infty$. On a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}}\right)dx$$

et, en posant $x + \frac{1}{\sqrt{2}} = y$ pour la première, $x - \frac{1}{\sqrt{2}} = y$ pour la seconde,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + 2y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{arc tg } y\sqrt{2}\right)_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

2° $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Si on pose $x = \text{tg } y$, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y}{\cos^4 y + \sin^4 y}\, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 y}{(\cos^2 y + \sin^2 y)^2 + (\cos^2 y - \sin^2 y)^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2y}{1 + \cos^2 2y}\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x} \frac{dx}{2}.$$

Si on pose $x = 2\pi - y$

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \int_{2\pi}^{\pi} - \frac{1 + \cos y}{1 + \cos^2 y}\, dy = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos^2 x}\, dx = 4 \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \pi\sqrt{2}.$$

15. Soit $f(z) = \frac{e^{zi}}{(1 + z^2)^3}$. Si $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, $zf(z) = \rho e^{\omega i} \frac{e^{\rho(i\cos\omega - \sin\omega)}}{(1 + \rho^2 e^{2\omega i})^3}$ a un module inférieur à $\frac{\rho}{(\rho^2 - 1)^3}$, car $\rho \sin \omega > 0$. Il en résulte que $zf(z)$ tend vers zéro, pour $\rho = \infty$; et que l'intégrale $\int f(z)dz$, sur un contour formé de l'axe réel, et d'une demi-circonférence de rayon infini, se réduit à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{(1 + x^2)^3}\, dx.$$

Elle est égale, d'après le théorème de Cauchy, au produit par $2\pi i$ du résidu du seul pôle $z = i$, intérieur à ce contour.

Soit $z = i + t$

$$\frac{e^{zi}}{(1+z^2)^3} = \frac{e^{ti-1}}{t^3(2i+t^3)} = \frac{1}{e(2i)^3 t^3} e^{ti}\left(1+\frac{t}{2i}\right)^{-3} =$$

$$= \frac{i}{8et^3}\left(1 + ti + \frac{(ti)^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{3ti}{2} + 6\left(\frac{ti}{2}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{16e}\left(\frac{2i}{t^3} - \frac{5}{t^2} - \frac{7i}{t} + \ldots\right).$$

$$R = -\frac{7i}{16e}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{7}{8e}\pi.$$

Il en résulte : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^2)^3}\, dx = 0$, ce qu'on peut démontrer en changeant x en $-x$, et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{7}{8e}\pi.$$

16. $$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Soit $f(z) = \frac{1+e^{2zi}}{(1+z^2)^2}$, si $z = \rho e^{\omega i}$, le module de

$$zf(z) = \rho e^{\omega i}\, \frac{1 + e^{2\rho(i\cos\omega - \sin\omega)}}{(1+\rho^2 e^{2\omega i})^2}$$

tend vers 0, pour $\rho = \infty$, si $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, car alors ce module est inférieur à $\frac{2\rho}{(\rho^2-1)^2}$. $\int f(z)dz$ est donc nul, sur un demi-cercle de rayon infini situé au-dessus de l'axe réel.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2xi}}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i R$$

où R est le résidu du pôle $z = i$, situé au-dessus de l'axe réel.

Soit $z = i + t$

$$f(i+t) = \frac{1 + e^{2(it-1)}}{t^2(2i+t)^2} = \frac{1 + e^{-2}(1 + 2it + \ldots)}{-4t^2}\left(1 - 2\frac{t}{2i} + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{t}{2i}\right)^2 \ldots\right) = -\frac{e^{-2}+1}{4t^2} - \frac{1+3e^{-2}}{4t}\, i + \ldots$$

$$R = -\frac{1+3e^{-2}}{4}\, i,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos 2x + i \sin 2x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1+3e^{-2}}{2}\, \pi$$

et, en égalant les parties réelles :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{3+e^2}{8e^2}\, \pi$$

17. Si on change a en $-a$, l'intégrale change de signe. Supposons $a > 0$, et $b > 0$. Considérons la fonction imaginaire $f(z) = \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \cdot \frac{e^{azi}}{z}$, qui a trois pôles : $z = \pm bi$, et $z = 0$.

Prenons $\int f(z)dz$ sur un contour formé de l'axe réel entre $x = -\rho$ et $-\varepsilon$, un demi-cercle de rayon ε, au-dessus de l'axe réel, cet axe entre $x = \varepsilon$ et ρ, et un demi-cercle de rayon ρ au-dessus de l'axe réel, pour revenir au point $z = -\rho$. Sur le cercle de rayon ρ, on a : $z = \rho e^{\omega i}$

$\int f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{\rho^2 e^{2\omega i} - b^2}{\rho^2 e^{2\omega i} + b^2}\, e^{a\rho(i\cos\omega - \sin\omega)} i d\omega$, dont le module est plus petit que

$$\int_0^{\pi} \frac{\rho^2 + b^2}{\rho^2 - b^2}\, e^{-a\rho \sin\omega} d\omega = 2\,\frac{\rho^2+b^2}{\rho^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\rho\sin\omega} d\omega$$

si $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin\omega}{\omega}$ varie de 1 à $\frac{2}{\pi}$, $\sin\omega > \frac{2}{\pi}\omega$. On a donc un module inférieur à

$$2\,\frac{\rho^2+b^2}{\rho^2-b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\rho\frac{2}{\pi}\omega} d\omega = 2\,\frac{\rho^2+b^2}{\rho^2-b^2}\,\frac{\pi}{2a\rho}\,(1 - e^{-a\rho}) < \frac{\rho^2+b^2}{\rho^2-b^2}\cdot\frac{\pi}{a\rho}$$

qui tend vers zéro, pour $\rho = \infty$.

$z = 0$ est un pôle simple, de résidu -1, pour $f(z)$; c'est-à-dire que :

$$\frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2}\frac{e^{azi}}{z} = \frac{-1}{z} - ai + \frac{4 + a^2b^2}{2b^2}z + \dots$$

Sur le demi-cercle de rayon ε, entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, on a $z = \varepsilon e^{\omega i}$, où ω varie de π à 0

$$\int f(z)dz = -\int \frac{dz}{z} - \int aidz + \dots = -\int_\pi^0 id\omega - ai\int \varepsilon e^{\omega i} id\omega + \dots$$

le premier terme est égal à πi, les autres tendent vers zéro, avec ε. On a donc

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\frac{e^{axi}}{x}dx + \pi i + \int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\frac{e^{axi}}{x}dx = 2\pi i R$$

où R est le résidu du pôle simple $z = bi$, c'est-à-dire la valeur de $\frac{z^2 - b^2}{z + bi}\frac{e^{azi}}{z}$, pour $z = bi$, ou $\frac{-2b^2}{2bi}\frac{e^{-ab}}{bi} = e^{-ab}$.

$$-\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\frac{e^{-axi}}{x}dx + \int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\frac{e^{axi}}{x}dx = \pi i(2e^{-ab} - 1) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}(e^{axi} - e^{-axi})\frac{dx}{x} = 2i\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\sin ax\frac{dx}{x}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\frac{\sin ax}{x}dx = \pi\left(e^{-ab} - \frac{1}{2}\right).$$

18. Soit $f(z) = \frac{e^{iaz^2}}{1 + z^4}$. Si $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\omega \geqslant 0$

$$zf(z) = \rho e^{\omega i}\frac{e^{a\rho^2(i\cos 2\omega - \sin 2\omega)}}{1 + \rho^4 e^{4\omega i}}$$

a un module inférieur à $\frac{\rho}{\rho^4 - 1}$, qui tend vers zéro pour $\rho = \infty$.

Formons $\int f(z)dz$ sur un contour formé de l'axe réel, de $x = 0$ à ρ, d'un quart de cercle de rayon ρ, allant de $z = \rho$ à $z = \rho i$, et de l'axe oy, du point ρi à o. Le seul pôle intérieur à ce contour est

le pôle simple $z = e^{\frac{\pi i}{4}}$, dont le résidu est la valeur de $\frac{z - e^{\frac{\pi i}{4}}}{z^4 + 1} e^{iaz^2}$ ou de $\frac{1}{4z^3} e^{-a} = \frac{z}{-4} e^{-a} = -\frac{1}{4} e^{-a} e^{\frac{\pi i}{4}}$.

Sur le quart de cercle, l'intégrale tend vers zéro, pour $\rho = \infty$. On a donc :

$$\int_0^\infty e^{aix^2} \frac{dx}{1 + x^4} + \int_\infty^0 e^{-aiy^2} \frac{idy}{1 + y^4} = -\frac{\pi i}{2} e^{-a} \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{aix^2} - ie^{-aix^2}}{1 + x^4} dx = (1 - i) \int_0^\infty \frac{\cos ax^2 - \sin ax^2}{1 + x^4} dx =$$

$$= \pi e^{-a} \frac{1 - i}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax^2 - \sin ax^2}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-a}.$$

19. Si $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqq \omega \leqq \pi$, $\varepsilon \leqq \rho \leqq r$, la fonction $Lz = L\rho + i\omega$ reste uniforme. La fonction $f(z) = \frac{Lz}{(1 + z^2)^2}$ a un seul pôle au-dessus de l'axe réel, $z = i$. Formons $\int \frac{Lz}{(1 + z^2)^2} dz$ sur un contour formé de l'axe réel, entre $-\rho$ et $-\varepsilon$, un demi-cercle de rayon ε, l'axe réel entre $+\varepsilon$ et ρ, et un demi-cercle de rayon ρ au-dessus de l'axe réel. Sur ce demi-cercle, on a $z = \rho e^{i\omega}$:

$$\int \frac{Lz}{(1 + z^2)^2} dz = \int_0^\pi \frac{L\rho + \omega i}{(1 + \rho^2 e^{2\omega i})^2} \rho e^{\omega i} i d\omega$$

le module de cette intégrale est plus petit que

$$\int_0^\pi \frac{L\rho + \omega}{(\rho^2 - 1)^2} \rho d\omega < \frac{\pi + L\rho}{(\rho^2 - 1)^2} \pi\rho$$

qui tend vers zéro, pour $\rho = \infty$.

Sur le cercle de rayon $\rho = \varepsilon$, on a :

$$\int_\pi^0 \frac{L\varepsilon + \omega i}{(1 + \varepsilon^2 e^{2\omega i})^2} \varepsilon e^{\omega i} i d\omega$$

dont le module est plus petit que

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega + \mathrm{L}\frac{1}{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^2}\,\varepsilon d\omega < \frac{\pi + \mathrm{L}\frac{1}{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^2}\,\pi\varepsilon$$

et tend aussi vers zéro, pour $\varepsilon = 0$. On a donc :

$$\int_{+\infty}^{0} \frac{\mathrm{L}x + \pi i}{(1+x^2)^2}\, e^{\pi i} dx + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{L}x}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi i \mathrm{R}$$

où R est le résidu du pôle $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i$. Il faut en effet remarquer que, sur la partie négative de l'axe réel, $z = e^{\pi i}\rho$, et $\mathrm{L}z = \pi i + \mathrm{L}\rho$ où ρ est variable. Soit $z = i + t = e^{\frac{\pi i}{2}}(1 - ti)$

$$\frac{\mathrm{L}z}{(1+z^2)^2} = \frac{\frac{\pi i}{2} + \mathrm{L}(1-ti)}{t^2(2i+t)^2} = \frac{-1}{4t^2}\left(\frac{\pi i}{2} - ti + \frac{t^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{t}{i} - \frac{3}{4}t^2 + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{8t^2} + \frac{\pi + 2i}{8t} + 3\frac{\pi i - 4}{32} + \ldots\ldots$$

$$\mathrm{R} = \frac{\pi + 2i}{8}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi i + \mathrm{L}x}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{L}x}{(1+x^2)^2}\, dx = \pi\,\frac{\pi i - 2}{4}.$$

En égalant les parties réelles, on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{L}x}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

20. Soit $z = e^{xi}$, $2\cos x = z + \frac{1}{z}$. Lorsque x varie de 0 à 2π, z décrit la circonférence c, de rayon 1, de centre 0.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{(13 - 5\cos x)^2}\, dx = \int_c \frac{2z(1+z)^2}{(26z - 5 - 5z^2)^2}\,\frac{dz}{zi} =$$

$$= \frac{2}{i}\int_c \left[\frac{1+z}{(5z-1)(5-z)}\right]^2 dz$$

à l'intérieur du cercle c, il y a un seul pôle $z = \frac{1}{5}$.

Si $z = \frac{1}{5} + t$, on a :

$$\frac{1+z}{(5z-1)(5-z)} = \frac{6+5t}{5t(24-5t)} = \frac{1}{20t}\left(1+\frac{5}{6}t\right)\left(1+\frac{5t}{24}+\left(\frac{5t}{24}\right)^2+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{20t}\left(1+\frac{25}{24}t+\ldots\right)$$

$$\left(\frac{1+z}{(5z-1)(5-z)}\right)^2 = \frac{1}{400t^2}\left(1+\frac{25}{12}t+\ldots\right).$$

Le résidu est $\frac{1}{12 \times 16}$. L'intégrale, sur le cercle c, est égale à $\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \frac{1}{12.16} = \frac{\pi}{48}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}\,dx = \frac{\pi}{48}.$$

21. Soit $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$, $z^a = \rho^a e^{a\omega i}$ a une valeur bien déterminée, et peut être considéré comme une fonction uniforme, lorsque la partie positive de l'axe réel est une coupure, que l'on ne traverse pas. $\frac{z^a}{z(1+z)}$ a, outre le point singulier $z = 0$, le pôle $z = -1 = e^{\pi i}$, pour lequel le résidu est égal à $-e^{a\pi i}$. Considérons $\int \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz$, prise sur un contour formé de l'axe réel, entre $+\varepsilon$ et $+\rho$, un cercle de rayon ρ décrit dans le sens positif, pour revenir au point $z = \rho$, l'axe réel de ρ à ε, et un cercle de rayon ε décrit dans le sens négatif, pour revenir au point $z = \varepsilon$. En considérant l'axe réel positif comme formé de deux droites infiniment voisines, on a ainsi un contour fermé, $z = 0$ n'est pas intérieur à ce contour, et l'intégrale est égale au produit par $2\pi i$ du résidu $-e^{a\pi i}$ du seul pôle intérieur. Sur le cercle $z = \rho e^{\omega i}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho^a e^{a\omega i}}{1+\rho e^{\omega i}}\,i d\omega$$

qui tend vers zéro pour $\rho = \infty$, car $a < 1$. Sur le cercle $z = \varepsilon e^{\omega i}$, on a

$$\int_{2\pi}^{0} \frac{\varepsilon^a e^{a\omega i}}{1+\varepsilon e^{\omega i}}\,i d\omega,$$

qui tend vers zéro pour $\varepsilon = 0$, car $a > 0$. Après qu'on a décrit le

premier cercle, z prend la forme $\rho e^{2\pi i}$, et $z^a = \rho^a e^{2a\pi i}$. On a donc :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2a\pi i}x^{a-1}}{1+x}\,dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx\,(e^{-a\pi i} - e^{a\pi i}) = -2\pi i$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

2° Il faut déterminer a de façon que $\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{2}{a}$; $\frac{\sin x}{x}$ a pour dérivée $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, qui reste négatif si $0 < x < \pi$, $\frac{\sin x}{x}$ varie alors de 1 à 0, et passe par la valeur $\frac{1}{2}$. Mais, si $x > \pi$, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$. Il y a une seule valeur positive de a, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, posons $a = \frac{1}{2} + x$

$$\frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \cos \pi x = 1 - \frac{(\pi x)^2}{2} + \frac{(\pi x)^4}{2.3.4} - \frac{(\pi x)^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\pi x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^3 x^4}{12} - \frac{\pi^5 x^6}{360} + \ldots$$

En considérant le second membre comme un terme très petit, que l'on remplacera par une valeur approchée, on a :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{9 - 2\pi + \frac{1}{3}\pi^4 x^4 - \frac{1}{90}\pi^6 x^6 + \ldots}}{2\pi}.$$

Une première approximation donne

$$x = \frac{-1 + \sqrt{2,7168}}{6,2832} = \frac{0,648}{6,2832} = 0,103.$$

Posons :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(1,649)^2 + \varepsilon}}{6,2832} = \frac{-1 + 1,649\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{1,649^2} - \frac{1}{8}\frac{\varepsilon^2}{1,649^4}\ldots\right)}{6,2832} =$$

$$= \frac{0,649 + \frac{\varepsilon}{3,298} - \frac{\varepsilon^2}{(3,298)^3}}{6,2832}$$

$$\varepsilon = -0,0024 + \frac{1}{3}(\pi x)^4 - \frac{1}{90}(\pi x)^6$$

en remplaçant x par 0,103 ; $(\pi x)^6$ est négligeable, et

$$\varepsilon = -0{,}0024 + 0{,}0036 = 0{,}0012$$
$$x = \frac{0{,}64936}{6{,}2832} = 0{,}1033.$$

22. $$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3}\right) e^{-x} \sin x\,dx.$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{1}{(1+x)^3} e^{-x} \sin x\,dx = -\int \frac{e^{-x}\sin x}{2}\, d\,\frac{1}{(1+x)^2} =$$
$$-\frac{1}{2(1+x)^2} e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+x)^2} e^{-x}dx$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos x - \sin x}{(1+x)^2} e^{-x}dx$$
$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{1+x} + \frac{\cos x + \sin x}{2(1+x)^2}\right) e^{-x}dx$$
$$\int \frac{\cos x + \sin x}{2(1+x)^2} e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \sin x) e^{-x}\, d\left(\frac{-1}{1+x}\right) =$$
$$= \frac{-1}{2(1+x)}(\cos x + \sin x)e^{-x} - \int \frac{\sin x}{1+x} e^{-x}dx$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos x + \sin x}{2(1+x)^2} e^{-x}dx = \frac{1}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x} e^{-x}dx$$
$$I = \int_0^\infty \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)^3} e^{-x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}.$$

23. Il faut que a et b ne soient pas compris entre -1 et $+1$, de façon que le dénominateur ne s'annule pas lorsque x varie de 0 à 2π ; car si, par exemple, $a = -\cos\alpha$, $-1 < a < 1$, pour $x = \alpha$ le rapport $\frac{x-\alpha}{(\cos x - \cos\alpha)(\cos x - b)}$ tend vers $\frac{1}{\sin\alpha(b - \cos\alpha)}$. Il en résulte que l'intégrale n'a pas de sens, elle comprend des parties infinies, même dans le cas où $\sin\alpha(b - \cos\alpha) = 0$, c'est-à-dire si $a = \pm 1$, ou $b = -a$.

Si a est égal à ± 1, $\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$, par exemple, tend vers 2,

pour $x = \pi$, et lorsque x est voisin de π, $\frac{1}{(\cos x + 1)(\cos x - b)}$ est de l'ordre de $\frac{1}{(x-\pi)^2(-1-b)}$, dont l'intégrale est infinie. De même si $b + a = 0$, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x - \cos \alpha)^2}$ n'a pas de sens.

Supposons $a^2 > 1$, $b^2 > 1$. En posant $e^{xi} = z$, on a :

$$2 \cos x = z + \frac{1}{z}; \quad idx = \frac{dz}{z}:$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x + a)(\cos x - b)} = \frac{1}{a+b}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\cos x - b} - \frac{1}{\cos x + a}\right)dx =$$

$$= \frac{2i}{a+b}\int\left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} - \frac{1}{z^2 - 2bz + 1}\right)dz,$$

lorsque x varie de 0 à 2π, z décrit la circonférence de rayon 1. Cette intégrale est alors égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de la fonction

$$\frac{2i}{a+b}\left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1} - \frac{1}{z^2 - 2bz + 1}\right)$$

pour les pôles intérieurs au contour. Il y a 4 pôles réels :

$$z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}, \quad z = b \pm \sqrt{b^2 - 1}.$$

Il y en a deux intérieurs au cercle de rayon 1, car les racines de l'équation $z^2 + 2az + 1 = 0$ ayant pour produit 1, une seule est comprise entre -1 et $+1$.

Si $a > 1$, pour ce pôle simple $z = -a + \sqrt{a^2 - 1}$, le résidu est la valeur de $\frac{z + a - \sqrt{a^2 - 1}}{z^2 + 2az + 1}$ pour cette valeur de z, ou $\frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}$,

Si $b > 1$, $\frac{1}{z^2 - 2bz + 1}$, pour le pôle $z = b - \sqrt{b^2 - 1}$ intérieur au cercle de rayon 1, a le résidu $-\frac{1}{2\sqrt{b^2 - 1}}$.

On a donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x + a)(\cos x - b)} = 2\pi i \frac{2i}{a+b}\left(\frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{2\sqrt{b^2 - 1}}\right) =$$

$$= \frac{-2\pi}{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}\right).$$

Si a, ou b, était négatif, le radical correspondant serait changé de signe.

24. En posant $\operatorname{tg} x = t$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^2 x + \sin x \cos x + 1}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 1}\,dx = \int_0^1 \frac{4 + t + t^2}{2 + 2t + t^2}\,\frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1 - t}{1 + t^2} + \frac{2 + t}{1 + (1 + t)^2}\right)dt = \int_0^1 \frac{1 - t}{1 + t^2}\,dt + \int_1^2 \frac{1 + \theta}{1 + \theta^2}\,d\theta =$$

$$= \int_0^2 \frac{dt}{1 + t^2} + \int_1^2 \frac{t\,dt}{1 + t^2} - \int_0^1 \frac{t\,dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} 2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,2 =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{5}{4} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.4^2} + \frac{1}{3.4^3} \cdots\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0{,}464064 + 0{,}111572 = 1{,}218304.$$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1 + x} > \frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}dx$, qui est infinie si $p \leqslant 0$.

Si

$$p > 0, \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{1 + x} < \int_0^1 x^{p-1}dx = \left(\frac{x^p}{p}\right)_0^1 = \frac{1}{p}.$$

D'autre part :

$$\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx > \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{p-2}dx$$

qui est infinie si $p \geqslant 1$.

Si

$$p < 1, \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx < \int_1^\infty x^{p-2}dx = \left(\frac{x^{p-1}}{p - 1}\right)_1^\infty = \frac{1}{1 - p}.$$

Il en résulte que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx$ a un sens, et une valeur finie, si $0 < p < 1$;

2° Si on pose $x = \dfrac{1}{y}$, on a :

$$\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx = \int_1^0 -\frac{y^{1-p}}{1 + \frac{1}{y}} \cdot \frac{dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{x^{-p}}{1 + x}\,dx$$

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1 + x}\,dx\,;$$

3° Soit $p = \frac{2m+1}{2n}$, où m et n sont deux nombres entiers positifs $m < n$. En posant $x = y^{2n}$, on a :

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{2ny^{2m}}{1+y^{2n}}\,dy.$$

Si on change y en $-y$, $\frac{y^{2m}}{1+y^{2n}}$ ne change pas

$$\int_0^\infty \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}}\,dy = -\int_0^{-\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}}\,dy = \int_{-\infty}^0 \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}}\,dy$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx.$$

Pour calculer cette intégrale, on peut considérer $\int \frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}\,dz$, sur un contour formé de l'axe ox entre $-R$ et $+R$, et d'un demi-cercle de rayon R.

Si

$$z = Re^{\omega i}, \quad \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\,z = R^{2(m-n)+1}\,\frac{e^{2m\omega i}}{\frac{1}{R^{2n}}+e^{2n\omega i}}\,e^{\omega i}$$

expression qui tend vers zéro, pour $R = \infty$, car $n - m \geqslant 1$, $2(m-n)+1 \leqslant -1$. Il en résulte que l'intégrale sur le cercle tend vers zéro, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$ est égale à la somme des intégrales autour des pôles intérieurs au contour, ou au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de $\frac{nz^{2m}}{1+z^{2n}}$, pour les pôles situés au-dessus de l'axe réel. Ces pôles sont les points $z = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2n}i}$ où $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pour l'un de ces pôles z_1, le résidu est la valeur de $nz^{2m}\,\frac{z-z_1}{1+z^{2n}}$, ou de

$$\frac{nz^{2m}}{2nz^{2n-1}} = \frac{z^{2m+1}}{2z^{2n}} = -\frac{1}{2}\,z^{2m+1}.$$

Pour le pôle $e^{(2k+1)\frac{\pi i}{2n}}$ le résidu est $-\frac{1}{2}\,e^{(2k+1)\frac{2m+1}{2n}\pi i}$, la somme

des résidus des n pôles est

$$-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}+e^{3\frac{2m+1}{2n}\pi i}+\ldots+e^{(2n-1)\frac{2m+1}{2n}\pi i}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{e^{(2m+1)\pi i}-1}{e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}-1}e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}=\frac{1}{e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}-e^{-\frac{2m+1}{2n}\pi i}}=$$

$$=\frac{1}{2i\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{1}{2i\sin p\pi}$$

$$\mathrm{I}=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad \text{si } p=\frac{2m+1}{2n}.$$

4° L'intégrale $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}dx$ est une fonction continue de p, si $0<p<1$. En effet, soit

$$\mathrm{J}=\int_0^1\frac{x^{p+\varepsilon-1}+x^{-p-\varepsilon}}{1+x}dx,\quad 0<p+\varepsilon<1$$

$$\mathrm{J}-\mathrm{I}=\int_0^1\frac{(1-x^{-\varepsilon})(x^{2p-1+\varepsilon}-1)x^{-p}}{1+x}dx$$

$1-x^{-\varepsilon}$ reste négatif, $x^{2p-1+\varepsilon}-1$ est positif si $p<\frac{1-\varepsilon}{2}$, négatif si $p>\frac{1-\varepsilon}{2}$. Pour toute valeur de x, entre 0 et 1, l'élément différentiel conserve le même signe, il en résulte que la valeur absolue de J — I est inférieure à celle de

$$\int_0^1(x^{p+\varepsilon-1}+x^{-p-\varepsilon}-x^{p-1}-x^{-p})\,dx=\frac{1}{p+\varepsilon}+\frac{1}{1-p-\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{p}-\frac{1}{1-p}=\varepsilon\left(\frac{1}{(1-p)(1-p-\varepsilon)}-\frac{1}{p(p+\varepsilon)}\right)=$$

$$=\varepsilon\frac{2p+\varepsilon-1}{p(p+\varepsilon)(1-p)(1-p-\varepsilon)},$$

expression qui tend vers zéro avec ε.

Si $0<p<1$, on peut choisir un nombre n aussi grand que l'on voudra, $2np$ sera compris entre deux nombres impairs $2m-1$ et $2m+1$

$$\frac{2m-1}{2n}<p<\frac{2m+1}{2n},\quad p=\frac{2m+1}{2n}-\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{n}.$$

On peut toujours choisir n assez grand pour que $1 \leqslant m \leqslant n - 1$, il suffit que : $n > \frac{1}{2p}$ et $n > \frac{1}{2(1-p)}$.

Soit $J = \int_0^\infty \frac{x^{p+\varepsilon-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(p+\varepsilon)\pi}$

$$|I - J| < \varepsilon \left| \frac{2p+\varepsilon-1}{p(p+\varepsilon)(1-p)(1-p-\varepsilon)} \right|$$

$$\left| \frac{1}{\sin(p+\varepsilon)\pi} - \frac{1}{\sin p\pi} \right| = \left| \frac{2\sin\frac{\pi\varepsilon}{2}\cos\frac{2p+\varepsilon}{2}\pi}{\sin p\pi \sin(p+\varepsilon)\pi} \right|$$

$$\left| I - \frac{\pi}{\sin p\pi} \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{|2p-1| + \frac{1}{n}}{p^2(1-p)\left(1-p-\frac{1}{n}\right)} + \frac{\pi^2}{n} \frac{\cos\left(p+\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi}{\sin p\pi \sin(p+\varepsilon)\pi}$$

qui est aussi petit que l'on voudra, si n est assez grand. Il en résulte que $I = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

26. Si x devient infini, l'intégrale est de l'ordre de

$$\int x^{a-2}dx = \frac{x^{a-1}}{a-1},$$

qui reste finie si $a < 1$. Pour $a = 1$, $\int \frac{dx}{x} = L\,x$ devient infinie. Si x tend vers zéro, on a une intégrale de l'ordre de $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, qui reste finie pour $x = 0$, si $a + 1 > 0$. Il faut donc que a soit compris entre -1 et $+1$, $-1 < a < 1$. On a alors, en effet :

$$\int_0^1 \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx < \int_0^1 x^a dx = \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)_0^1 = \frac{1}{a+1}$$

$$\int_1^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx < \int_1^\infty x^{a-2}dx = \left(\frac{a^{a-1}}{a-1}\right)_1^\infty = \frac{1}{1-a}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2}\,dx < \frac{2}{1-a^2}.$$

Si $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$, $z^a = \rho^a e^{a\omega i}$ reste bien déterminé. Formons $\int \frac{z^a}{(1+z)^2}\,dz$, sur le même contour que le problème 21,

contour formé du cercle de rayon ρ décrit dans le sens positif, du cercle de rayon ε dans le sens négatif, ces cercles étant réunis par deux droites infiniment voisines, coïncidant avec l'axe réel de ε à ρ. L'intégrale sur ce contour fermé, décrit dans le sens positif, est égale à $2\pi i$, multiplié par le résidu du seul pôle $z = -1 = e$.

$$z^a = (-1 + z + 1)^a = e^{a\pi i}\left(1 - a(z+1) + \frac{a(a-1)}{2}(z+1)^2 + \ldots\right)$$

$$\frac{z^a}{(1+z)^2} = e^{a\pi i}\left(\frac{1}{(1+z)^2} - \frac{a}{1+z} + \frac{a(a-1)}{2} + \ldots\right)$$

$$R = -ae^{a\pi i}$$

si $z = \rho e^{\omega i}$, sur le cercle de rayon ρ, on a

$$\int \frac{z^a}{(1+z)^2}\,dz = \int \frac{\rho^{a+1}}{(1+\rho e^{\omega i})^2}\, e^{(a+1)\omega i} i d\omega.$$

Si ρ devient infini, ρ^{a-1} tend vers zéro, puisque $a < 1$. Si ρ tend vers zéro, ρ^{a+1} tend vers zéro, puisque $a > -1$. Les intégrales sur les deux cercles tendront vers zéro, pour $\rho = \infty$, et $\varepsilon = 0$. On aura alors :

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(1+x)^2} + \int_\infty^0 \frac{e^{2a\pi i}x^a}{(1+x)^2}\,dx = -2a\pi i e^{a\pi i}$$

car, après avoir décrit le cercle de rayon ρ, on aura $z = \rho e^{2\pi i}$, et $z^a = \rho^a e^{2a\pi i}$

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(1+x)^2} = \frac{-2a\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{2a\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{a\pi}{\sin a\pi}.$$

27. Il faut que b ne soit pas compris entre 0 et 1, pour que le dénominateur ne s'annule pas. Il faut, en outre, $0 < a < 1$. Car, si x est voisin de 1, on a une intégrale de l'ordre de

$$\int (1-x)^{-a} dx = \frac{(1-x)^{1-a}}{a-1},$$

qui reste finie si $a < 1$, mais deviendrait infinie, pour $x = 1$, si $a > 1$, et aussi si $a = 1$, car $\int \frac{dx}{1-x} = -L(1-x)$ devient

infinie. Si x est voisin de o, on a une intégrale de l'ordre de $\int x^{a-1}dx = \frac{x^a}{a}$, qui reste finie si $a > 0$.

Posons :

$$\frac{x}{1-x} = \frac{by}{b-1}, \quad x = \frac{by}{b-1+by}, \quad \frac{dx}{x-b} = \frac{-dy}{(1+y)(b-1+by)}$$

Comme on a $b > 1$, ou $b < 0$, dans les deux cas $\frac{b}{b-1} > 0$; y variant de o à $+\infty$, x variera de o à 1

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^a \frac{dx}{x(b-x)} = \int_0^\infty \left(\frac{by}{b-1}\right)^a \frac{dy}{(1+y)by} =$$
$$= \frac{b^{a-1}}{(b-1)^a}\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy$$

intégrale déjà calculée (problème 21)

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{-a}}{b-x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,b^{a-1}(b-1)^{-a} = \frac{\pi}{b\sin a\pi}\left(\frac{b}{b-1}\right)^a.$$

Si $a = \frac{1}{2}$, $\quad b = 2$, $\quad \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

28. Si $z = \rho e^{\omega i}$, $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$, $z^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\omega i}{3}}$ a une valeur bien déterminée. Formons $\int \frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z^2+a^2)^2}\,dz$ sur un contour formé de l'axe réel entre $-\rho$ et $-\varepsilon$, un demi-cercle de rayon ε décrit dans le sens négatif, entre les points $z = -\varepsilon$ et ε, l'axe réel de $+\varepsilon$ à ρ, et un demi-cercle de rayon ρ, dans le sens positif. Sur ce cercle on a : $\int_0^\pi \frac{\rho^{\frac{4}{3}} e^{\frac{4}{3}\omega i}\, i d\omega}{(a^2+\rho^2 e^{2\omega i})^2}$ qui tend vers zéro pour $\rho = \infty$, et aussi pour $\rho = 0$. Sur la partie négative de l'axe réel, on aura $z = \rho e^{\pi i}$, $z^{\frac{1}{3}} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi i}{3}}$. On a donc :

$$\int_\infty^0 \frac{-x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi i}{3}}\,dx}{(x^2+a^2)^2} + \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}\,dx}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i R$$

R étant le résidu du pôle $z = ai$, qui est intérieur au contour d'intégration, si $a > 0$. Soit $z = ai + t = ae^{\frac{\pi i}{2}}\left(1 + \frac{t}{ai}\right)$

$$\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi i}{6}}}{t^2(2ai + t)^2}\left(1 + \frac{t}{ai}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{-1}{4t^2} a^{-\frac{5}{3}} e^{\frac{\pi i}{6}} \left(1 + \frac{t}{3ai} + \ldots\right)\left(1 - \frac{t}{ai} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} a^{-\frac{5}{3}} e^{\frac{\pi i}{6}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2i}{3at} + \ldots\right)$$

$$R = \frac{-i}{6} a^{-\frac{8}{3}} e^{\frac{\pi i}{6}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{(x^2 + a^2)^2} = 3\, a^{-\frac{8}{3}} \frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{1 + e^{\frac{\pi i}{3}}} = \frac{\pi a^{\frac{1}{3}}}{6a^3 \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^{\frac{1}{3}}}{3a^3\sqrt{3}}.$$

CHAPITRE II

—

INTÉGRALES MULTIPLES
SURFACES-VOLUMES

Surfaces et volumes. — 29. Soit $t = \operatorname{tg} \theta$, $x = \cos 2\theta$, $y = \operatorname{tg} \theta \cos 2\theta$. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $x = y = 0$. Si θ varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, x varie de 0 à -1, y de 0 à $-\infty$, B est dans l'angle $x'oy'$. Si on change θ en $-\theta$, y change de signe, A est sur la branche symétrique dans l'angle $x'oy$. La courbe est une strophoïde, une droite passant par o la coupe en un seul point, autre que le point double o.

L'aire comprise entre l'axe ox, l'arc oA de courbe, et l'ordonnée de A est :

$$\int_x^0 y dx = -\int_\alpha^{-\frac{\pi}{4}} 2 \operatorname{tg} \theta \cos 2\theta \sin 2\theta d\theta =$$

$$= -\int_\alpha^{-\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta) d\theta = \int_\alpha^{-\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \alpha + 1 + \sin 2\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

L'aire comprise entre la corde oA, l'axe ox, et l'ordonnée de A est, puisque x est négatif :

$$-\frac{xy}{2} = \frac{-1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos^2 2\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} (1 - \cos 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{2} \right).$$

L'aire S_1, comprise entre la corde oA et l'arc oA, est la différence de ces deux aires, ou :

$$S_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha - 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha).$$

L'aire S_2, comprise entre la corde OB et l'arc OB, est donnée par la même formule ; mais, dans l'intégrale $\int_x^0 y\,dx$, y serait négatif et donnerait l'aire changée de signe. On a donc

$$S_2 = -\frac{\pi}{4} - \beta + 1 + \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta + \sin 2\beta)$$

il est facile de vérifier que, si $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $S_2 > 0$.

L'aire du triangle ayant pour côtés les droites OA, AB, BO, de sommets $A(x, y)$ et $B(x', y')$, est égale à

$$\frac{1}{2}(xy' - yx') = \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cos 2\beta (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) > 0.$$

En retranchant $S_1 + S_2$, on a l'aire limitée par la droite AB, et les deux arcs OA, OB :

$$S = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)(\cos 2\alpha \cos 2\beta - 1) + \beta - \alpha - \frac{1}{2}(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) =$$
$$= \beta - \alpha + \sin(\beta - \alpha)\left(\cos(\beta - \alpha) - \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right).$$

3o. On a l'ellipse

$$x^2 + 3(y - 1)^2 = 3.$$

On peut poser :

$$x = \sqrt{3}\cos t, \qquad y = 1 + \sin t, \qquad 0 \leqq t < 2\pi.$$

La droite $y = x$ coupe l'ellipse aux points déterminés par l'équation :

$$1 + \sin t = \sqrt{3}\cos t$$
$$1 - \cos^2 t = (\sqrt{3}\cos t - 1)^2, \qquad 4\cos^2 t - 2\sqrt{3}\cos t = 0$$

si $\cos t = 0$, $\sin t = -1$, $t = \frac{3\pi}{2}$, $x = y = 0$

si $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{6}$, $x = y = \frac{3}{2}$.

En transportant l'origine au point (0, 1) centre de l'ellipse, on a l'ellipse :

$$X = \sqrt{3}\cos t, \qquad Y = y - 1 = \sin t,$$

qui peut être considérée comme la projection du cercle

$$X = \sqrt{3}\cos t, \qquad Y = \sqrt{3}\sin t,$$

l'angle des deux plans ayant pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{3}}$. La corde donnée est la projection de la corde du cercle qui passe par les points $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$; le plus petit arc qui correspond à cette corde sera $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. Cette corde divise le cercle dans le rapport $\frac{A}{B}$, puisque les aires sont proportionnelles à leurs projections.

L'aire du cercle est 3π. L'aire comprise entre l'arc de cercle et la corde, si l'angle au centre est 2α, serait :

$$R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

comme $R = \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, cette aire est $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{A}{B} = \frac{\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}.$$

31. Soit $0 < y < a$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{a}{y} - \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{a^2}{y^2\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}}$$

$$x = aLy + \sqrt{a^2 - y^2} - aL\left(\frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}\right) + c.$$

En choisissant l'origine, nous supposerons $c = -aLa$

$$(1) \qquad x = \sqrt{a^2 - y^2} - aL\frac{a^2 + a\sqrt{a^2 - y^2}}{y^2} = \sqrt{a^2 - y^2} + aL\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a}.$$

On aura toute la courbe en changeant le signe de $\sqrt{a^2 - y^2}$, et en faisant varier y de $-a$ à $+a$.

Si $0 < y < a$, l'expression (1) donne

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} > 0$$

x augmente de $-\infty$ à 0 ; ce qui donne la branche AB, asymptote à l'axe des x (*fig.* 2). En B la tangente a pour coefficient angulaire 1. Si on change y en $-y$, on a la branche symétrique par rapport à ox. En changeant le signe du radical, on a

$$(2)\quad x = -\sqrt{a^2-y^2} + a\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{a},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

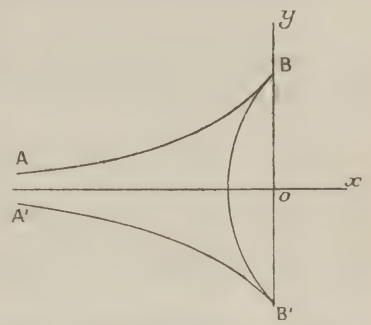


Fig. 2

Si y augmente de 0 à a, x augmente de $a(-1+\mathrm{L}2) = -0{,}307a$ à 0. De $-a$ à 0 on aura une partie symétrique ; ce qui donne la courbe BB'.

A une valeur de y correspondent deux valeurs de x, (1) et (2), dont la différence est

$$-2\sqrt{a^2-y^2} + 2a\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

L'aire comprise entre les trois branches de courbe ABB'A' est :

$$\mathrm{A} = 4\int_0^a \left(-\sqrt{a^2-y^2} + a\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)dy.$$

En intégrant par partie, on a :

$$\int\left(-\sqrt{a^2-y^2} + a\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)dy =$$

$$= \left(-\sqrt{a^2-y^2} + a\mathrm{L}\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)y + \int y\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy$$

$$\mathrm{A} = 4\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy.$$

Soit $y = a\sin t$,

$$\mathrm{A} = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \pi a^2.$$

32. Sur la surface $z^2 = x^2 - y^2$, on a $zdz = xdx - ydy$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Le plan tangent forme avec le plan xoy un angle γ,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

une aire $d\sigma$ a pour projection $dxdy = d\sigma \cos\gamma$, et l'aire de la surface est donnée par l'intégrale double

$$A = \iint \frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy =$$

$$= \iint \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\, dxdy = \iint \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-y^2}}\, dxdy$$

intégrale prise à l'intérieur de la courbe représentée, en coordonnées polaires, par $\rho^2 = a^2 \sin 2\omega$. Mais, pour avoir des points réels du cône, il faut $y^2 < x^2$, $0 < \omega < \frac{\pi}{4}$. On a donc :

$$A = \iint \sqrt{\frac{2\cos^2\omega}{\cos^2\omega - \sin^2\omega}}\, \rho d\rho d\omega$$

où $0 < \rho < a\sqrt{\sin 2\omega}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{a\sqrt{\sin 2\omega}} \rho d\rho = a^2 \sin\omega\cos\omega$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\sqrt{2}\sin\omega\cos^2\omega}{\sqrt{\cos^2\omega - \sin^2\omega}} d\omega = a^2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}\omega}{(1+\operatorname{tg}^2\omega)^2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\omega}} \frac{d\omega}{\cos^2\omega} =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{tdt}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}$$

et, en posant : $\operatorname{tg}^2\omega = t^2 = 1 - 2u^2$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{-du}{(1-u^2)^2} = \frac{a^2}{8}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{(1-u)^2}\right) du =$$

$$= \frac{a^2}{8}\left(\frac{2u}{1-u^2} + \mathrm{L}\,\frac{1+u}{1-u}\right)_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{2} + \mathrm{L}(1+\sqrt{2})\right).$$

33. L'aire à calculer est symétrique par rapport aux plans xoy

et xoz ; elle est limitée par la courbe :

$$y^2 = 2px, \qquad z^2 = x(p\frac{b^2}{2} - x), \qquad 0 < x < p\frac{b^2}{2}.$$

Le trièdre des parties positives des axes comprend le quart de la surface du cylindre à évaluer.

Sur la parabole, base du cylindre, $y^2 = 2px$, on a :

$$ydy = pdx, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx.$$

L'aire comprise entre deux génératrices infiniment voisines du cylindre, la base ds et la courbe

$$z = \sqrt{x(p\frac{b^2}{2} - x)}$$

est :

$$zds = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2}b^2 - x\right)}\,dx$$

L'aire totale à calculer est :

$$A = 4\int_0^{p\frac{b^2}{2}} \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2}b^2 - x\right)}\,dx.$$

Posons :

$$\frac{pb^2 - 2x}{2x + p} = \operatorname{tg}^2 t, \qquad x = \frac{p}{2}(b^2\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$\int\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2}b^2 - x\right)}\,dx = -(b^2+1)^2\frac{p^2}{2}\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= (b^2+1)^2p^2\int\frac{\cos 4t - 1}{16}\,dt = \left(\frac{b^2+1}{4}\right)^2 p^2\left(\frac{\sin 4t}{4} - t\right)$$

tg t doit varier de b à 0, et t de arc tg b à 0.

$$A = \frac{p^2}{4}(b^2+1)^2(t - \sin t\cos t\cos 2t) = \frac{p^2}{4}[(b^2+1)^2\operatorname{arc\,tg} b + b(b^2-1)].$$

34. La projection, sur le plan xoy, de la courbe d'intersection, a pour équation :

$$(x^2 + y^2 + ax^2 + by^2)^2 = 4c^2(ax^2 + by^2)$$

et, en coordonnées polaires :

$$\rho^2 = 4c^2 \frac{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega}{(1 + a\cos^2\omega + b\sin^2\omega)^2}.$$

Posons

$$u = a\cos^2\omega + b\sin^2\omega = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos 2\omega$$

$$\rho = 2c\frac{\sqrt{u}}{1+u}, \qquad \frac{2c}{\rho} = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

en prenant les dérivées par rapport à ω, on a :

$$2c\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{a-b}{2}\left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)\sin 2\omega =$$

$$= \frac{a-b}{2}\,\frac{1 - a\cos^2\omega - b\sin^2\omega}{u\sqrt{u}}\sin 2\omega$$

$$2c\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{(a-b)^2}{4}\,\frac{3-u}{u^2\sqrt{u}}\sin^2 2\omega + (a-b)\,\frac{1-u}{u\sqrt{u}}\cos 2\omega$$

$$= \frac{(a-u)(u-b)(3-u)}{u^2\sqrt{u}} + \frac{(2u-a-b)(1-u)}{u\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{-u^3 - u^2 + (2a+2b+ab)u - 3ab}{u^2\sqrt{u}}$$

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{(2a+2b+ab)u - 3ab}{2cu^2\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{a(ab+2a-b)\cos^2\omega + b(ab+2b-a)\sin^2\omega}{2cu^2\sqrt{u}}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. ρ' peut s'annuler pour $\operatorname{tg}^2\omega = \frac{a-1}{1-b}$, $u = 1$, $\rho = c$. Si 1 n'est pas compris entre a et b, $\operatorname{tg}\omega$ est imaginaire, et ρ' ne peut pas s'annuler. Lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ varie de $2c\frac{\sqrt{a}}{1+a}$ à $2c\frac{\sqrt{b}}{1+b}$. En croissant si $a > b > 1$, et en décroissant si $1 > a > b > 0$. Dans ce cas il peut y avoir 4 points d'inflexion symétriques pour

$$\operatorname{tg}^2\omega = \frac{a}{b}\cdot\frac{ab+2a-b}{a-2b-ab},$$

ils sont réels si

$$0 < b < \frac{a}{2+a} < a < 1$$

on a alors

$$\rho = \frac{c}{a + b + 2ab}\sqrt{3ab(2a + 2b + ab)}.$$

De sorte que si $\frac{a}{2 + a} < b < a$ il n'y a pas d'inflexion, la forme de la courbe est analogue à celle d'une ellipse. Si

$$0 < b < \frac{a}{2 + a} < a < 1,$$

entre $\omega = 0$ et le point d'inflexion la concavité est tournée vers l'origine, entre le point d'inflexion et $\omega = \frac{\pi}{2}$ elle est du côté opposé à l'origine. Si $0 < b < 1 < a$, ρ passe par la valeur maxima $\rho = c$ pour $\operatorname{tg} \omega = \pm\sqrt{\frac{a - 1}{1 - b}}$. Dans le cas où $0 < b < \frac{a}{2 + a} < 1 < a$ il y a aussi 4 points d'inflexion symétriques par rapport aux axes.

Sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$, on a :

$$xdx + ydy = (c - z)dz$$

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{x}{c - z}, \quad q = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{y}{c - z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{c^2}{(c - z)^2}.$$

L'aire $d\sigma$ de la sphère a pour projection l'élément

$$dxdy = d\sigma \cos \gamma = \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad d\sigma = \frac{c}{c - z}\, dxdy.$$

L'aire d'une portion de la sphère est donnée par l'intégrale

$$\iint \frac{cdxdy}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}.$$

Le cône $ax^2 + by^2 = z^2$, dont les sections $z = c$ sont des ellipses, coupe la sphère, qui est tangente au plan xoy, suivant une courbe représentée par les équations

$$\rho = 2c\frac{\sqrt{u}}{1 + u}, \qquad u = a\cos^2\omega + b\sin^2\omega, \qquad z = \frac{2cu}{1 + u}.$$

Supposons $1 < b < a$, de sorte que $u > 1$, $\frac{2u}{1 + u} > 1$, $z > c$. Tous les points de la courbe sont au-dessus du centre de la sphère L'aire de la sphère intérieure au cône se projette à l'intérieur de la

courbe $\rho = 2c\,\frac{\sqrt{u}}{1+u}$, chaque point correspondant à un seul point de la sphère. On a l'aire

$$A = 4\iint \frac{c\rho d\rho d\omega}{\sqrt{c^2-\rho^2}}, \qquad 0 < \rho < 2c\,\frac{\sqrt{u}}{1+u}, \qquad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Le trièdre des axes positifs comprend, en effet, le quart de cette aire.

$$\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{c^2-\rho^2}} = \left(-\sqrt{c^2-\rho^2}\right)_0^{2c\frac{\sqrt{u}}{1+u}} = c - c\,\frac{u-1}{u+1} = \frac{2c}{u+1}$$

$$A = 8c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(1+a)\cos^2\omega + (1+b)\sin^2\omega} =$$

$$= \frac{8c^2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+b}{1+a}}\operatorname{tg}\omega\right)\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi c^2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}.$$

Si $0 < b < a < 1$, $0 < u < 1$, $\frac{2u}{1+u} < 1$, $z < c$, tous les points de la courbe sont au-dessous du centre de la sphère. L'aire de la sphère intérieure au cône se projette sur tout le cercle $x^2 + y^2 = c^2$, à l'intérieur de la courbe $\rho = 2c\,\frac{\sqrt{u}}{1+u}$ correspond un seul point de la sphère, et deux points pour les parties extérieures à cette courbe. La portion de la sphère extérieure au cône a pour projection l'aire intérieure à la courbe. On a donc dans ce cas

$$A = 4\pi c^2 - \frac{4\pi c^2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}.$$

Si $0 < b < 1 < a$, on a $z > c$, $u > 1$, lorsque $\operatorname{tg}^2\omega < \frac{a-1}{1-b}$. Le point M, $\operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{a-1}{1-b}}$, $\rho = c$ est sur la circonférence, projection du grand cercle de la sphère. Entre M et $\omega = \frac{\pi}{2}$, la courbe est au-dessous du centre de la sphère. De sorte que, si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a-1}{1-b}}$, lorsque $0 < \omega < \alpha$ l'aire intérieure au cône se projette à l'intérieure de la courbe $\rho = 2c\,\frac{\sqrt{u}}{1+u}$. Mais si $\alpha < \omega < \frac{\pi}{2}$ il y a, en outre, deux portions d'aires de la sphère,

dont les projections sont superposées entre la courbe précédente et le cercle $\rho = c$. On a donc :

$$A = \frac{4\pi c^2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} + 8\iint \frac{c\rho d\rho\, d\omega}{\sqrt{c^2-\rho^2}} \quad \text{où } \frac{2c\sqrt{u}}{1+u} < \rho < c,$$

$$\alpha < \omega < \frac{\pi}{2}, \iint \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{\sqrt{c^2-\rho^2}} = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} c\, \frac{1-u}{1+u}\, d\omega =$$

$$= c\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \left(-1 + \frac{2}{(1+a)\cos^2\omega + (1+b)\sin^2\omega}\right) d\omega =$$

$$= c\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+b}{1+a}}\operatorname{tg}\alpha\right)\right)$$

$$A = 4c^2\left[\frac{3\pi}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} - \pi + 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-1}{1-b}} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+b}{1+a}\,\frac{a-1}{1-b}}\right].$$

35. Soit l'ellipsoïde $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, dont la huitième partie est située dans le trièdre des axes positifs.

On a $\frac{zdz}{c^2} = -\frac{x\,dx + y\,dy}{a^2}$,

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = \frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{c^2 y}{a^2 z}.$$

L'aire de l'ellipsoïde est

$$A = 8\iint \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy = 8\iint \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\,\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{8}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4 + (c^2-a^2)\rho^2}{a^2-\rho^2}}\, \rho\, d\omega\, d\rho.$$

Si on pose $\frac{a^4 + (c^2-a^2)\rho^2}{a^2-\rho^2} = t^2$, $\rho^2 = a^2\,\frac{t^2-a^2}{t^2+c^2-a^2}$

$$A = 4\pi\, ac^2 \int_a^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2+c^2-a^2)^2}.$$

Supposons $a > c$

$$A = \pi a c^2 \int_a^\infty \left(\frac{1}{(t+\sqrt{a^2-c})^2} + \frac{1}{(t-\sqrt{a^2-c^2})^2} + \frac{2}{t^2+c^2-a^2} \right) dt =$$

$$= \pi a c^2 \left[\frac{-2t}{t^2+c^2-a^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \mathrm{L} \frac{t-\sqrt{a^2-c^2}}{t+\sqrt{a^2-c^2}} \right]_a^\infty =$$

$$\pi a \left[2a - \frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}} \mathrm{L} \frac{a-\sqrt{a^2-c^2}}{a+\sqrt{a^2-c^2}} \right] = 2\pi a^2 + \frac{2\pi a c^2}{\sqrt{a^2-c^2}} \mathrm{L} \frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}.$$

Si $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$,

$$A = 2\pi \left(1 + \frac{\mathrm{L}(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} \right).$$

36. Les dérivées partielles de z sont :

$$p = q = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x+y}, \quad 1 + p^2 + q^2 = 1 + x + y.$$

On a l'aire :

$$A = \iint \sqrt{1 + x + y}\, dx\, dy,$$

où $x + y < 3$, $x > 0$, $y > 0$

$$\int_0^{3-x} \sqrt{1+x+y}\, dy = \left(\frac{2}{3} (1+x+y)^{\frac{3}{2}} \right)_0^{3-x} = 2\, \frac{8-(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$A = \int_0^3 2\, \frac{8-(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\, dx = 16 - \frac{4}{15}\, 31 = 7 + \frac{11}{15}$$

37. Les dérivées partielles de z sont $p = \frac{x}{a}$, $q = -\frac{y}{a}$, on a l'aire :

$$A = \iint \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2}}\, dx\, dy = \iint \sqrt{a^2+\rho^2}\, \frac{\rho}{a}\, d\rho\, d\omega$$

où

$$0 < \rho < a\sqrt{\cos\omega}, \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$$

car en dehors de ces limites ρ est imaginaire,

$$\int_0^{a\sqrt{\cos\omega}} \sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\,d\rho = \left[\frac{1}{3}(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\sqrt{\cos\omega}} = \frac{a^3}{3}\left(2\sqrt{2}\cos^3\frac{\omega}{2}-1\right) =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\cos\frac{3\omega}{2}+3\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2}}-1\right)$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{3}\left(\frac{\cos 3\frac{\omega}{2}+3\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{2}}-1\right)d\omega =$$

$$= \frac{a^2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{3\omega}{2}+3\sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}-\omega\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\,\frac{10-3\pi}{9}$$

38. $S = \iint \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy, \quad V = \iint \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)dx\,dy$

intégrales prises à l'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$.

Posons $x = a\rho\cos\omega$, $y = b\rho\sin\omega$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\rho^2$, le déter-

minant différentiel $\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta\rho} & \frac{\delta y}{\delta\rho} \\ \frac{\delta x}{\delta\omega} & \frac{\delta y}{\delta\omega} \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\rho\sin\omega & \rho\cos\omega \end{vmatrix} = ab\rho,$

$$S = \iint \sqrt{1+\rho^2}\,ab\rho\,d\rho\,d\omega, \quad V = \iint \frac{1}{2}(a\cos^2\omega+b\sin^2\omega)\,ab\rho^3\,d\rho\,d\omega,$$

où $0<\omega<2\pi$, $0<\rho<c$,

$$S = ab\int_0^{2\pi} d\omega\int_0^c \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2\pi}{3}(1+c^2)^{\frac{3}{2}}ab - \frac{2\pi}{3}ab$$

$$V = \frac{abc^4}{16}\int_0^{2\pi}[a+b+(a-b)\cos 2\omega]\,d\omega = \frac{\pi ab}{8}(a+b)\,c^4.$$

39. $\frac{\delta z}{\delta x} = y, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = x, \quad S = \iint \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy,$

$$V = \iint xy\,dx\,dy,$$

ou en coordonnées polaires, $dx\,dy$ étant remplacé par $\rho\,d\rho\,d\omega$,

$$S = \iint \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\omega, \quad V = \iint \rho^3 \sin\omega \cos\omega\,d\rho\,d\omega,$$

ρ peut varier de o à $\sqrt{\cos\omega}$, et $o < \omega < \frac{\pi}{4}$ pour que ρ soit réel.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\omega \int_0^{\sqrt{\cos\omega}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{3}\left[(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\sqrt{\cos\omega}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1+\cos\omega)^{\frac{3}{2}} - 1\right]\frac{d\omega}{3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sqrt{2}\cos^3\frac{\omega}{2} - 1\right)\frac{d\omega}{3} =$$

$$= \left[\frac{4\sqrt{2}}{9}\sin\frac{\omega}{2}\left(3-\sin^2\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\omega}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}\sin\frac{\pi}{8}\left(3-\sin^2\frac{\pi}{8}\right) -$$

$$- \frac{\pi}{12} = 2\,\frac{1+5\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{12}$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\omega\cos^3\omega}{4}\,d\omega = \frac{-1}{16}\left(\cos^4\omega\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{64}.$$

40. Le cylindre a pour base la parabole $(x-y)^2 = 2(x+y) - 1$, tangente aux deux axes ox, oy. Mais on ne considère que la portion comprise entre les deux points de contact. Ce solide est symétrique, comme les deux surfaces, par rapport au plan xoy. La moitié du solide est dans l'angle des parties positives des axes. On a :

$$V = 2\iint \sqrt{2xy}\,dx\,dy \quad \text{où } \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1$$

$$V = 2\int_0^1 \sqrt{2x}\,dx\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)_0^{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt{2x}\,(1-\sqrt{x})^3\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{45}.$$

Pour la surface conique $z^2 = 2xy$, on a $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$

$$S = 2\iint \sqrt{1 + \frac{y^2 + x^2}{2xy}}\, dx\, dy = 2\iint \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\, dx\, dy,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} < 1$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{x}}\, dx \left(2x\sqrt{y} + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right)_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - 2 + 4\sqrt{x} - \frac{8}{3} x\right) dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{x} - 2x + \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} x^2\right)_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Sur la parabole $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, on a : $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$, $ds^2 = dx^2\left(1 + \frac{y}{x}\right)$. Le cylindre est limité à la surface conique $z = \pm\sqrt{2xy}$, en décomposant la surface par les génératrices parallèles à oz, on a la surface :

$$S_1 = 2\int z ds = 2\int_0^1 \sqrt{2y(x+y)}\, dx = 2\sqrt{2}\int_0^1 (1-\sqrt{x})\sqrt{x + (1-\sqrt{x})^2}\, dx$$

ou, en posant $x = t^2$

$$S_1 = 2\sqrt{2}\int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 - 2t + 2t^2}\, 2t\, dt$$

soit $1 - 2t = \theta$,

$$S_1 = \int_1^{-1} (1 - \theta^2)\sqrt{1 + \theta^2}\, \frac{-d\theta}{2} = \int_0^1 (1 - \theta^2)\sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta.$$

L'intégration par parties donne :

$$3\int \theta^2\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \int \theta d(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}} = \theta(1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} - \int \sqrt{1+\theta^2}\,(1+\theta^2) d\theta$$

$$4\int \theta^2\sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta = \theta(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}} - \int \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta$$

$$\int (1 - \theta^2)\sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta = -\frac{\theta}{4}(1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}\int \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta.$$

D'autre part :

$$\int \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \theta\sqrt{1+\theta^2} - \int \left(\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right) d\theta$$

$$2\int \sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \theta\sqrt{1+\theta^2} + L(\theta + \sqrt{1+\theta^2})$$

$$\int (1-\theta^2)\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \frac{5}{8} L(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) - \frac{\theta}{4}(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{8}\theta\sqrt{1+\theta^2}$$

$$S_1 = \int_0^1 (1-\theta^2)\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = \frac{\sqrt{2} + 5L(1+\sqrt{2})}{8}.$$

41. La courbe d'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde est sur la surface

$$\frac{x^2}{\sin^2\beta}(\sin^2\alpha - \sin^2\beta) = \frac{y^2}{\cos^2\beta}(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)$$

$$y = \pm x \operatorname{cotg}\beta.$$

L'intersection est formée de deux cercles.

On aura

$$R^2 - x^2 - y^2 < R^2 - x^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} - y^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$$

lorsque $y^2 < x^2 \operatorname{cotg}^2\beta$. C'est-à-dire que, pour un point (x, y) situé dans l'angle des deux droites $y = \pm x \operatorname{cotg}\beta$, qui comprend l'axe ox, ou son prolongement ox', le z de la sphère est inférieur à celui de l'ellipsoïde. Dans l'angle dièdre correspondant, la sphère est intérieure à l'ellipsoïde. Dans l'angle dièdre, formé par les plans $y = \pm x \operatorname{cotg}\beta$, qui comprend l'axe oy ou oy', l'ellipsoïde est intérieur à la sphère. Le volume commun est donc formé de la portion de sphère comprise entre les deux plans, lorsque $\frac{y^2}{x^2} < \operatorname{cotg}^2\beta$, et le volume de l'ellipsoïde compris dans les angles dièdres supplémentaires, pour lesquels $\frac{y^2}{x^2} > \operatorname{cotg}^2\beta$. La portion de sphère est limitée par un angle dièdre égal à $2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, la somme des volumes de sphère compris dans les deux angles opposés est $\frac{4}{3} R^3(\pi - 2\beta)$. Si z est constant, l'ellipsoïde est coupé suivan-

l'ellipse représentée par

$$x = \sqrt{R^2 - z^2}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos t, \qquad y = \sqrt{R^2 - z^2}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin t,$$

et, pour la portion comprise dans le dièdre à évaluer

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 t \operatorname{cotg}^2\beta \operatorname{tg}^2\alpha$$

doit être supérieur à $\operatorname{cotg}^2\beta$, $\operatorname{tg}^2 t > \operatorname{cotg}^2\alpha$, t peut varier entre $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Si on considère l'ellipse comme la projection du cercle

$$\frac{x}{\cos t} = \frac{y}{\sin t} = \sqrt{R^2 - z^2}\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

l'aire de la portion de cercle correspondante aux deux angles opposés est

$$2\alpha(R^2 - z^2)\,\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha},$$

et l'aire de l'ellipse comprise dans l'angle dièdre considéré est

$$2\alpha(R^2 - z^2)\,\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Le volume de ce dièdre, limité à l'ellipsoïde, est :

$$2\alpha\,\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)dz =$$

$$= 2\alpha\,\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)_{-R}^{R} = \frac{8}{3}\alpha\,\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}R^3.$$

Le volume total est :

$$V = \frac{4}{3}R^3\left(\pi - 2\beta + 2\alpha\,\frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}\right),$$

42. La courbe d'intersection des deux surfaces a pour projection, sur le plan xoy, l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4$. Le volume commun se projette à l'intérieur de l'ellipse, une parallèle à oz le coupe aux

deux points

$$z_1 = 2 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24}, \qquad z_2 = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{72}, \qquad z_1 - z_2 = 2 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18}$$

$$V = \iint \left(2 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18}\right) dxdy$$

intégrale prise à l'intérieur de l'ellipse, c'est-à-dire que

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 4.$$

Effectuons le changement de variables :

$$x = 4\rho \cos t, \qquad y = 6\rho \sin t, \qquad 0 < \rho < 1.$$

On aura les points (x, y) intérieurs à l'ellipse, si t varie de 0 à 2π, ρ de 0 à 1. Dans l'intégrale double on doit remplacer $dxdy$ par $\frac{D(x, y)}{D(\rho, t)} d\rho dt$, où $\frac{D(x, y)}{D(\rho, t)}$ représente le déterminant des dérivées partielles de x et y par rapport à ρ et t

$$\begin{vmatrix} 4 \cos t, & 6 \sin t \\ -4\rho \sin t, & 6\rho \cos t \end{vmatrix} = 24\rho$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2(1 - \rho^2) 24\rho \, d\rho dt = 48\pi \int_0^1 (1 - \rho^2) 2\rho \, d\rho = 24\pi.$$

43. L'intersection des deux surfaces est formée de deux coniques situées dans les plans :

$$x^2 - a^2 + \frac{x - \lambda}{\mu - \lambda}(a^2 - \mu^2) = 0, \qquad (x - \mu)\left(x + \frac{a^2 - \lambda\mu}{\mu - \lambda}\right) = 0.$$

Mais

$$\frac{a^2 - \lambda\mu}{\mu - \lambda} = a + \frac{(a + \lambda)(a - \mu)}{\mu - \lambda} > a.$$

La conique située dans le plan $x = \frac{\lambda\mu - a^2}{\mu - \lambda}$ est imaginaire, la partie réelle de l'intersection est la seule conique, dans le plan $x = \mu$. Considérons le volume limité par le paraboloïde où $\lambda < x < \mu$, et la partie de l'ellipsoïde pour laquelle $\mu < x < a$. Lorsque x est constant, la section de ce volume sera une ellipse

située sur le paraboloïde si $\lambda < x < \mu$, l'aire de cette ellipse est

$$\pi bc \frac{x-\lambda}{\mu-\lambda} \frac{a^2-\mu^2}{a^2}.$$

Si $\mu < x < a$ la section est une ellipse de l'ellipsoïde, sa surface est $\pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. On a donc :

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_\lambda^\mu \pi bc \frac{a^2-\mu^2}{a^2} \cdot \frac{x-\lambda}{\mu-\lambda} dx + \int_\mu^a \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \\ &= \pi bc \frac{a^2-\mu^2}{a^2(\mu-\lambda)} \left(\frac{x^2}{2} - \lambda x\right)_\lambda^\mu + \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)_\mu^a = \\ &= \pi bc \frac{a^2-\mu^2}{2a^2} (\mu-\lambda) + \pi bc\left(a - \mu - \frac{a^3-\mu^3}{3a^2}\right) = \\ &= \frac{2}{3} \pi bc(a-\mu) + \frac{\pi bc}{6a^2} (a^2-\mu^2)(\mu-3\lambda). \end{aligned}$$

Le volume limité par le paraboloïde et l'autre partie de l'ellipsoïde est :

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi abc - V_1 = \frac{2}{3} \pi bc(a+\mu) - \frac{\pi bc}{6a^2} (a^2-\mu^2)(\mu-3\lambda).$$

On aura $V_1 = V_2$, si $\lambda = -\mu \frac{3a^2+\mu^2}{3(a^2-\mu^2)}$, ce qui suppose $0 < \mu < a(\sqrt[3]{4} - 1)$ pour que $-a < \lambda < \mu$.

44. Si on prend pour origine le point de la surface, oz étant la normale, xoz le plan fixe ; la surface est engendrée par les cercles

$$y = x \operatorname{tg} \omega, \qquad x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Le volume, compris entre deux cercles infiniment voisins, peut être considéré, en négligeant des infiniment petits du second ordre, comme le volume d'une sphère de rayon R, compris entre deux plans formant l'angle $d\omega$. L'ensemble des volumes compris dans les deux dièdres opposés est : $\frac{4}{3} R^3 d\omega$. On a donc :

$$V = \frac{4}{3} \int_0^\pi \frac{c^3 d\omega}{(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)^3}.$$

En remplaçant ω par $\pi - \omega$, puis en posant $\operatorname{tg}\omega = \frac{at}{b}$, on a :

$$V = \frac{8}{3}c^9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)^3} = \frac{8}{3}c^9\int_0^{\infty} \frac{(b^2 + a^2t^2)^2}{a^5b^5(1+t^2)^3}\,dt.$$

Mais on a :

$$\int \frac{1-t^4}{(1+t^2)^3}\,dt = \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t}{1+t^2}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{1-t^4}{(1+t^2)^3}\,dt = 0,$$

$$\int \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{t}{(1+t^2)^2}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = 0,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^3} = 3\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)^3}\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\infty} \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{3}{16}\pi$$

$$V = \frac{8c^9}{3a^5b^5}\int_0^{\infty} \frac{b^4 + 2a^2b^2t^2 + a^4t^4}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{\pi c^9}{6a^5b^5}(3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4).$$

On pourrait également chercher le volume V intérieur à la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z\frac{c^3(x^2+y^2)}{a^2x^2+b^2y^2} = 0$$

$$z = c^3\frac{x^2+y^2}{a^2x^2+b^2y^2} \pm \sqrt{\left(c^3\frac{x^2+y^2}{a^2x^2+b^2y^2}\right)^2 - x^2 - y^2}$$

$$V = \iint 2\sqrt{\frac{c^6}{(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)^2} - \rho^2}\,\rho d\rho d\omega$$

où

$$0 < \rho < \frac{c^3}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}, \qquad 0 < \omega < 2\pi$$

après avoir intégré par rapport à ρ, on retrouve la même intégrale par rapport à ω.

45. Sur le paraboloïde on a :

$$adz = ydx + xdy, \quad p = \frac{y}{a}, \quad q = \frac{x}{a}, \quad 1 + p^2 + q^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{a^2}.$$

On a la surface

$$A = \iint \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2}}\, dxdy = \iint \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{a^2}}\, \rho d\rho d\omega$$

à l'intérieur de la courbe $\rho = a\sqrt{\sin 2\omega}$, qui comprend deux boucles symétriques par rapport à l'origine, qui correspondent à $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ et $\pi < \omega < 3\frac{\pi}{2}$. On a ainsi, pour l'ensemble de la surface comprise à l'intérieur des deux nappes du cylindre :

$$A = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{a\sqrt{\sin 2\omega}} \sqrt{a^2 + \rho^2}\, \rho d\rho = \frac{2a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \sin 2\omega)^{\frac{3}{2}} - 1]\, d\omega.$$

Si on pose

$$\omega = \frac{\pi}{4} + \alpha, \qquad 1 + \sin 2\omega = 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha,$$

$$A = -\frac{\pi a^2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\, a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\alpha d\alpha$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\alpha d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2\alpha)\cos\alpha d\alpha = 2\left(\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{20 - 3\pi}{9}\, a^2.$$

2° $$V = \iint \frac{xy}{a}\, dxdy = \iint \frac{1}{a}\rho^3 \sin\omega \cos\omega d\rho d\omega$$

à l'intérieur des deux boucles de la courbe $\rho = a\sqrt{\sin 2\omega}$.

$$V = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\cos\omega d\omega \int_0^{a\sqrt{\sin 2\omega}} \rho^3 d\rho = \frac{a^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\omega d\omega =$$

$$= \frac{a^3}{4}\left(\frac{\cos^3 2\omega}{6} - \frac{\cos 2\omega}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

46. Si $z > 0$ est constant, on a la courbe

$$\rho = z + a\cos\omega, \qquad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2};$$

comme $\rho > 0$, l'aire est

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(z^2 + 2az \cos \omega + a^2 \frac{1 + \cos 2\omega}{2}\right) d\omega =$$

$$= \left(z^2\omega + 2az \sin \omega + \frac{a^2}{2} \omega + \frac{a^2}{4} \sin 2\omega\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2az + \left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$

$$V = \int_0^a A dz = \left(az^2 + \frac{\pi z^3}{6} + \frac{\pi a^2}{4} z\right)_0^a = a^3 + \frac{5\pi}{12} a^3.$$

Le centre de gravité (X, Y, Z) est donné par les relations :

$$VX = \iiint x dx dy dz = \iiint \rho^2 \cos \omega d\rho d\omega dz =$$

$$= \iint \frac{\cos \omega}{3} d\omega dz (z + a \cos \omega)^3 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega}{12} d\omega \left[(z + a \cos \omega)^4\right]_0^a =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 [(1 + \cos \omega)^4 - \cos^4 \omega] \frac{\cos \omega}{6} d\omega =$$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (7 + 11 \cos \omega + 8 \cos 2\omega + 3 \cos 3\omega + \cos 4\omega) \frac{d\omega}{12} =$$

$$= \frac{7\pi + 20}{24} a^4$$

$$X = \frac{7\pi + 20}{5\pi + 12} \cdot \frac{a}{2}$$

$Y = 0$ à cause de la symétrie du solide

$$VZ = \iiint z dx dy dz = \iiint \rho z d\rho d\omega dz = \iint \frac{z}{2} d\omega dz (z + a \cos \omega)^2 =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{2} a^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cos \omega + \frac{\cos^2 \omega}{2}\right) =$$

$$= \frac{a^4}{8} \left(4\omega + \frac{16}{3} \sin \omega + \sin 2\omega\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{4} \left(\pi + \frac{8}{3}\right),$$

$$Z = \frac{3\pi + 8}{5\pi + 12} a.$$

Si x et y sont variables indépendantes, on a :

$$dz = d\rho + a \sin \omega \, d\omega$$

$$d^2z = d^2\rho + a \cos \omega \, d\omega^2 + a \sin \omega \, d^2\omega$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad \rho d\rho = xdx + ydy, \qquad d^2x = d^2y = 0$$

$$\rho d^2\rho = dx^2 + dy^2 - d\rho^2 = \frac{(xdy - ydx)^2}{\rho^2}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}, \qquad d\omega = \frac{xdy - ydx}{\rho^2}, \qquad d^2\omega = -2\frac{xdy - ydx}{\rho^4}(xdx + ydy)$$

$$d^2z = \frac{(ydx - xdy)^2}{\rho^3} + ax\frac{(ydx - xdy)^2}{\rho^5} + 2ay\frac{ydx - xdy}{\rho^5}(xdx + ydy) =$$

$$= \frac{1}{\rho^5}[y^2(\rho^2 + 3ax)dx^2 + y(-4ax^2 + 2ay^2 - 2x\rho^2)dx\,dy +$$
$$+ x(x\rho^2 - 2ay^2 + ax^2)dy^2]$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{y^2}{\rho^3} + 3a\frac{xy^2}{\rho^5}, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta xy} = -\frac{xy}{\rho^3} - ay\frac{2x^2 - y^2}{\rho^5},$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{x^2}{\rho^3} - ax\frac{2y^2 - x^2}{\rho^5}, \qquad x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} + 2xy\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} + y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = 0.$$

47. L'aire engendrée par l'arc de courbe OM, autour de OX, est

$$2\pi\int y ds = 2\pi\int_0^x y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

La tangente $Y - y = y'(X - x)$ engendre un cône de sommet $Y = 0$, $X = x - \frac{y}{y'}$, sa hauteur est $x - X = \frac{y}{y'}$, le rayon de base est y, sa surface latérale $\pi y\sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}$, on a :

$$2\int_0^x y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = K\frac{y^2}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Cette égalité étant une identité, les dérivées des deux membres,

par rapport à x, doivent être égales :

$$2y\sqrt{1+y'^2} = K\left(2y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y^2y''}{y'^2\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{y'dy'}{dy} = \frac{2(K-1)}{K}\frac{y'^2(1+y'^2)}{y}$$

$$\frac{2(K-1)}{K}\frac{dy}{y} = \frac{dy'}{y'(1+y'^2)} = \left(\frac{1}{y'} - \frac{y'}{1+y'^2}\right)dy'$$

$$\frac{4(K-1)}{K}Ly = 2Ly' - L(1+y'^2) + Lc$$

$$\frac{1+y'^2}{y'^2} = cy^{4\frac{1-K}{K}}, \qquad y'^2 = \frac{1}{cy^{4\frac{1-K}{K}} - 1}$$

$$x = \int_0^y \sqrt{cy^{4\frac{1-K}{K}} - 1}\,dy.$$

Si $K = \frac{4}{3}$,

$$x = \int_0^y \sqrt{\frac{c-y}{y}}\,dy.$$

Si on pose

$$\frac{c-y}{y} = \operatorname{tg}^2 t, \qquad y = c\cos^2 t,$$

$$x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} c(1-\cos 2t)dt = \frac{c}{2}(\pi - 2t + \sin 2t)$$

ou, si $2t = -\theta$,

$$x - \frac{\pi c}{2} = \frac{c}{2}(\theta - \sin\theta), \qquad c - y = \frac{c}{2}(1-\cos\theta)$$

cycloïde dont la base est $y = c$, tangente en O à OX.

48. L'hyperbole a pour équation $xz = a^2$, elle engendre une surface de révolution, dont l'équation est

$$z^2(x^2+y^2) = a^4$$

$$V = \iint \frac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = a^2\iint d\rho\,d\omega.$$

Cette intégrale double peut se remplacer par l'intégrale curviligne

$$V = a^2 \int \rho d\omega$$

le long de la courbe fermée c, dans le sens positif.

2° Si c est une circonférence de centre o, ρ est constant,

$$V = 2\pi\rho a^2.$$

Il en résulte que V est fini pour toute courbe fermée.

3° Si c est une ellipse de foyer o, on peut supposer que son axe est ox, son équation est

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega}, \qquad e < 1.$$

$$V = pa^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - e\cos\omega} = pa^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2}\left[1 - e + (1+e)\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right]} =$$

$$= \frac{2pa^2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)\right)_0^{2\pi} = \frac{2p\pi a^2}{\sqrt{1-e^2}}$$

car $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ varie de o à $+\infty$ puis de $-\infty$ à o ; $\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)$ varie de o à $\frac{\pi}{2}$ et à π.

49. Le paraboloïde passe par les axes ox et oz. Les quatre génératrices, qui limitent l'aire, ont pour équations :

$$x = y = 0, \qquad y = z = 0, \qquad \begin{cases} x = 1 \\ z = Ky, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2 \\ Ky = 2x. \end{cases}$$

Elles se coupent aux points O, A(1, 0,0), B(1, $\frac{2}{K}$, 2), C(0,0,2), le quadrilatère OABC se projette sur le plan xoz suivant le rectangle de sommets C, O, A et B′(1, 2) projection de B, dont les côtés sur les axes sont $x = 1$, $z = 2$. On a le volume

$$V = \iint y\,dx\,dz = \frac{1}{K}\iint xz\,dx\,dz$$

le point (x, z) étant intérieur au rectangle, on a

$$V = \frac{1}{K}\int_0^1 x\,dx \int_0^2 z\,dz = \frac{1}{K}.$$

2° Si u_1, u_2, u_3, u_4 sont nuls pour $t = 0$, la surface

$$x = t^2(1 + u_1)z + t(1 + u_2), \qquad y = t(2 + u_3)z + t^2(1 + u_4)$$

contient l'axe oz, qui correspond à $t = 0$. Sur cette surface, on a :

$$dx - t^2(1 + u_1)dz = 2t(1 + u_1)z\,dt + (1 + u_2)\,dt + (t^2u_1'z + tu_2')dt$$
$$dy - t(2 + u_3)dz = [(2 + u_3)z + tu_3'z + 2t(1 + u_4) + t^2u_4']dt.$$

En éliminant dt, et en supposant $t = 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = 2z.$$

Le plan tangent au point $(0, 0, z)$ a pour équation

$$Y = 2zX.$$

Le plan tangent en un point du paraboloïde a pour équation

$$Z - z = -K\frac{y}{x^2}(X - x) + \frac{K}{x}(Y - y)$$

ou

$$x(Z - z) + z(X - x) = K(Y - y)$$

en un point $(0, o, z)$ de oz, cette équation devient

$$Xz = KY.$$

Les deux surfaces ont même plan tangent en tout point de OZ, si $K = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, $V = 2$.

5o. On a le volume

$$V = \iint \frac{xy}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

où $x^2 + y^2 < a^2$, $x > 0$, $y > 0$.

Et, en coordonnées polaires :

$$V = \iint \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\frac{\rho^2}{a^2}\sin\omega\cos\omega\rho\,d\rho\,d\omega$$

où

$$0 < \rho < a, \qquad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\cos\omega\,d\omega = \frac{1}{2}(\sin^2\omega)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{2a^2}\int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\rho^3 d\rho$$

et, en posant $\rho = a \sin t$

$$V = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^3 t dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos^4 t) \sin t dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(\frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{15};$$

2° Le centre de gravité est donné par les expressions :

$$VX = \iiint x dx dy dz = \iint \frac{x^2 y}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^a \frac{\rho^4}{a^2}\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega \cos^2\omega d\omega = \frac{1}{3a^2}\int_0^a \rho^4 \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho$$

$$VY = \iiint y\, dx\, dy\, dz = \int_0^a \frac{\rho^4}{a^2}\sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega \cos\omega d\omega =$$

$$= \frac{1}{3a^2}\int_0^a \rho^4 \sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho$$

$$VZ = \iiint z dx\, dy\, dz = \iint \frac{z^2}{2}\, dx dy = \iint \frac{x^2 y^2}{2a^4}(a^2 - x^2 - y^2) dx\, dy =$$

$$= \int_0^a \frac{a^2 - \rho^2}{2a^4}\rho^5 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega \cos^2\omega d\omega =$$

$$= \frac{1}{2a^4}\left(\frac{a^2\rho^6}{6} - \frac{\rho^8}{8}\right)_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\omega}{4} d\omega = \frac{a^4}{8.24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\omega}{2} d\omega = \frac{\pi a^4}{32.24}.$$

En posant $\rho = a \sin t$, on a :

$$VX = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t\, dt = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{8} \sin^2 2t\, dt =$$

$$= \frac{a^4}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} - \sin^2 2t \cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{a^4}{24}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} - \frac{\sin^3 2t}{6}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{4.24}.$$

$$X = Y = \frac{5}{32}\pi a, \quad Z = \frac{5}{256}\pi a$$

Le volume étant symétrique par rapport au plan $y = x$, on pourrait prévoir que $X = Y$.

Intégrales multiples. — 51. Si y est constant, x varie de 0 à $\sqrt[3]{1 - y^3}$

$$\int x^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx = -\frac{1}{4}(1 - x^3 - y^3)^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{1-y^3}} x^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, dx = \frac{1}{4}(1 - y^3)^{\frac{4}{3}}$$

et l'intégrale double devient :

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 (1 - y^3)^{\frac{4}{3}}\, y\, dy.$$

Posons $y^3 = t$, $\quad I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{3}} dt.$

Soit $\frac{1-t}{t} = \theta^3$, $\quad dt = -3t^2\theta^2 d\theta$, $\quad (1-t)dt = -\frac{3\theta^5 d\theta}{(1+\theta^3)^3}$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\theta^6 d\theta}{(1+\theta^3)^3},$$

en intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{\theta^6}{(1+\theta^3)^3}\, d\theta = \int \frac{\theta^4}{6}\, d\,\frac{-1}{(1+\theta^3)^2} = \frac{-\theta^4}{6(1+\theta^3)^2} + \frac{2}{3}\int \frac{\theta^3 d\theta}{(1+\theta^3)^2}$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\theta^6 d\theta}{(1+\theta^3)^3} = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{(1+\theta^3)^2}$$

$$\int \frac{\theta^3 d\theta}{(1+\theta^3)^2} = \int \frac{\theta}{3}\, d\,\frac{-1}{1+\theta^3} = -\frac{\theta}{3(1+\theta^3)} + \frac{1}{3}\int \frac{d\theta}{1+\theta^3}$$

$$I = \frac{1}{18}\int_0^\infty \frac{d\theta}{1+\theta^3} =$$

$$= \frac{1}{54}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+\theta} + \frac{1-2\theta}{2(1-\theta+\theta^2)} + \frac{2}{1+\frac{1}{3}(2\theta-1)^2}\right) d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{108}\, L\, \frac{1+2\theta+\theta^2}{1-\theta+\theta^2} + \frac{1}{18\sqrt{3}} \text{arc tg}\, \frac{2\theta-1}{\sqrt{3}}\right)_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{18\sqrt{3}}\left(\text{arc tg}\,\infty - \text{arc tg}\,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{18\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{81} =$$

$$= 0{,}0671777.$$

52. La surface est un tore, engendré par le cercle

$$(x - a)^2 + z^2 = b^2$$

tournant autour de oz. Sur cette surface, on a :

$$\begin{aligned} dx &= -(a + b\cos\theta)\sin\varphi\, d\varphi - b\sin\theta\cos\varphi\, d\theta \\ dy &= (a + b\cos\theta)\cos\varphi\, d\varphi - b\sin\theta\sin\varphi\, d\theta \\ dz &= b\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} dx, & -\sin\varphi, & -\sin\theta\cos\varphi \\ dy, & \cos\varphi, & -\sin\theta\sin\varphi \\ dz, & 0, & \cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos\varphi\cos\theta\, dx + \sin\varphi\cos\theta\, dy + \sin\theta\, dz = 0.$$

La normale a pour équations

$$\frac{X - x}{\cos\varphi\cos\theta} = \frac{Y - y}{\sin\varphi\cos\theta} = \frac{Z - z}{\sin\theta}.$$

Si on prend l'intégrale de surface, sur la surface extérieure, soit $d\sigma$ l'élément de surface sur le tore, on aura :

$$dxdy = \sin\theta\, d\sigma, \qquad dydz = \cos\varphi\cos\theta\, d\sigma, \qquad dzdx = \sin\varphi\cos\theta\, d\sigma$$

$$I = \iint xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint (x\cos\varphi\cos\theta + y\sin\varphi\cos\theta + z\sin\theta)d\sigma$$

$$= \iint [(a + b\cos\theta)\cos\theta + b\sin^2\theta]d\sigma = \iint (a\cos\theta + b)d\sigma.$$

Mais, le tore étant symétrique par rapport au plan xoy, si on change θ en $\pi + \theta$, $\cos\theta$ change de signe, et $d\sigma$ ne change pas.

$$\iint \cos\theta\, d\sigma = 0$$

$$I = b\iint d\sigma = b\sigma$$

σ étant l'aire totale du tore, que l'on peut calculer en prenant la partie correspondant à $z > 0$, $\sin\theta > 0$

$$I = 2b\iint \frac{dxdy}{\sin\theta}, \qquad \text{où} \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 < \varphi < 2\pi$$

le déterminant différentiel

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta \varphi} & \frac{\delta x}{\delta \theta} \\ \frac{\delta y}{\delta \varphi} & \frac{\delta y}{\delta \theta} \end{vmatrix} = (a + b\cos\theta)b \begin{vmatrix} -\sin\varphi, & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi, & -\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= (a + b\cos\theta)b\sin\theta$$

$$I = 2b^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a + b\cos\theta)d\theta\, d\varphi = 4\pi b^2 \left(a\theta + b\sin\theta\right)_0^{\pi} = 4\pi^2 ab^2.$$

53.

$$\int \frac{dx}{1 + y\cos x} = \int \frac{dx}{(y+1)\cos^2\frac{x}{2} + (1-y)\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + y\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}, \quad \text{si} \quad y^2 < 1.$$

Posons

$$\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} = \operatorname{tg} t, \qquad y = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \cos 2t, \qquad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

$$\int_0^a dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y\cos x + 1} = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\, dy =$$

$$= -4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} t\,dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos a)^2 = \frac{1}{2}(\pi - \arcsin a)\arcsin a$$

ces arcs étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. On a aussi, en changeant l'ordre des intégrations :

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy\,dx}{y\cos x + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^a \frac{dy}{y\cos x + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L(1 + a\cos x)}{\cos x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\arccos a)^2.$$

L'intégrale double a un sens bien déterminé, puisque $\frac{1}{y\cos x + 1}$ reste fini, et inférieur à 1, ce qui justifie l'interversion de l'ordre d'intégration.

Si $a = \frac{1}{4}$, pour calculer la valeur numérique de l'intégrale, on peut former les séries :

$$\arc\sin a = a + \frac{1}{2}\frac{a^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{a^5}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{a^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

$$(\arc\sin a)^2 = a^2 + \frac{2}{3}\frac{a^4}{2} + \ldots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{a^{2n}}{n} + \ldots$$

$$\arc\sin\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6.4^3} + \frac{3}{10.4^5} + \frac{5}{7.4^9} + \ldots = 0{,}252680$$

$$\left(\arc\sin\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3.4^4} + \frac{2}{45.4^5} + \frac{1}{35.4^7} + \ldots = 0{,}063847$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L(1+\frac{1}{4}\cos x)}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2}\arc\sin\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\arc\sin\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}36498.$$

54. Le point (x, y) doit être intérieur à la première parabole et extérieur à la seconde, qui n'ont aucun point commun. Il doit être intérieur à la troisième parabole, et extérieur à la quatrième. Il faut ainsi :

$$y > 0, \quad 2x + 1 < y^2 < 4x + 4,$$
$$4 - 4x < y^2 < 9 - 6x.$$

Les sommets du quadrilatère curviligne sont les 4 points

$$A(0, 2), \quad B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \quad C(1, \sqrt{3}),$$
$$D\left(\frac{1}{2}, \sqrt{6}\right)$$

(*fig.* 3). Si on pose

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv,$$

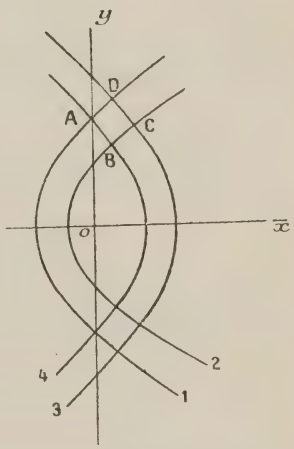


Fig. 3

le déterminant différentiel est $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2)$.

Dans l'intégrale double il faut remplacer $dxdy$ par

$$4(u^2 + v^2)dudv,$$

les inégalités entre x et y deviennent :

$$uv > 0, \quad (2u^2 + 1)(2v^2 - 1) > 0, \quad (u^2 + 1)(1 - v^2) > 0,$$
$$(u^2 - 1)(v^2 + 1) > 0, \quad (2u^2 - 3)(2v^2 + 3) < 0.$$

Si on changeait u et v en $-u$ et $-v$, x et y ne changeraient pas. On peut donc supposer $u > 0$, $v > 0$ et l'on aura :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < v < 1, \qquad 1 < u < \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Comme

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u^2 + v^2,$$

l'intégrale double devient

$$I = \iint \frac{8uv}{(1 + u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}}\, du dv,$$

entre les limites précédentes. On a alors :

$$\int \frac{u du}{(1 + u^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2 - v^2}}$$

et l'intégrale double devient :

$$I = 8\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2 - v^2}} - \frac{2}{\sqrt{10 - 4v^2}}\right) v dv = 4\left(\sqrt{10 - 4v^2} - 2\sqrt{2 - v^2}\right)_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} =$$
$$= 4(\sqrt{6} - 2 - \sqrt{8} + \sqrt{6}) = 0{,}282.$$

55. L'ellipsoïde étant symétrique par rapport aux plans de coordonnées, en changeant x en $-x$, on voit que

$$\iiint xy\, dx dy dz = 0, \qquad \iiint xz\, dx dy dz = 0,$$

de même

$$\iiint yz\, dx dy dz = 0,$$

et

$$I = \iiint (2x + 3y + 6z)^2 dx dy dz = \iiint (4x^2 + 9y^2 + 36z^2) dx dy dz.$$

Si on fait le changement de variables

$$x = 3\rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = 2\rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta,$$

l'équation de l'ellipsoïde devient $\rho = 1$. On a tous les points intérieurs en supposant

$$0 < \theta < \pi, \qquad 0 < \varphi < 2\pi, \qquad 0 < \rho < 1.$$

Le déterminant différentiel

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} 3\sin\theta\cos\varphi, & 2\sin\theta\sin\varphi, & \cos\theta \\ 3\rho\cos\theta\cos\varphi, & 2\rho\cos\theta\sin\varphi, & -\rho\sin\theta \\ -3\rho\sin\theta\sin\varphi, & 2\rho\sin\theta\cos\varphi, & 0 \end{vmatrix} = 6\rho^2\sin\theta$$

l'élément de volume

$$dx\,dy\,dz = 6\rho^2\sin\theta\,.\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$I = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} 36\rho^2.6\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d = 6^3\times\frac{1}{5}2\pi\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{864}{5}\pi.$$

56. Comme on peut changer x en $-x$ et y en $-y$, on aura

$$\iiint xy\,dx\,dy\,dz = 0, \qquad \iiint xz\,dx\,dy\,dz = 0, \qquad \iiint yz\,dx\,dy\,dz = 0$$

car ces intégrales contiennent des éléments symétriques, qui se détruisent. Si on pose

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

On aura :

$$\rho^2 < 2az, \qquad \rho^2 < 3a^2 - z^2, \qquad 0 < \omega < 2\pi$$

$$I = \iiint [(x + y + z)^2 - \frac{9}{5}a^2]\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint (x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{5}a^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint (\rho^2 + z^2 - \frac{9}{5}a^2)\rho\,d\rho\,d\omega\,dz =$$

$$= 2\pi\iint (\rho^2 + z^2 - \frac{9}{5}a^2)\rho\,d\rho\,dz.$$

Si on suppose d'abord z constant, lorsque $0 < z < a$, on aura

$$0 < \rho < \sqrt{2az} < \sqrt{3a^2 - z^2}.$$

Lorsque $a < z < a\sqrt{3}$, $\quad 0 < \rho < \sqrt{3a^2 - z^2} < \sqrt{2az}$.

Si $z < 0$, ou $z > a\sqrt{3}$, il n'y a pas de valeurs réelles de ρ. On a ainsi :

$$I = 2\pi \int_0^a dz \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{z^2\rho^2}{2} - \frac{9}{10}a^2\rho^2\right)_0^{\sqrt{2az}} + 2\pi \int_a^{a\sqrt{3}} dz \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{z^2\rho^2}{2} - \frac{9}{10}a^2\rho^2\right)_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} =$$

$$= 2\pi \int_0^a (a^2z^2 + az^3 - \frac{9}{5}a^3z)dz + 2\pi \int_a^{a\sqrt{3}} [-\frac{z^4}{4} + \frac{9}{10}a^2z^2 - \frac{9}{20}a^4]dz =$$

$$= 2\pi \left(\frac{a^2z^3}{3} + \frac{az^4}{4} - \frac{9}{10}a^3z^2\right)_0^a + 2\pi \left(-\frac{z^5}{20} + \frac{3}{10}a^2z^3 - \frac{9}{20}a^4z\right)_a^{a\sqrt{3}} = -\frac{7}{30}\pi a^5.$$

57. Si x est constant, y variera de 0 à $x - a$, qui est positif, si $a < x < 1$. On a :

$$I = \int_a^1 dx \int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

si $y = t^2$,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{x} + t} = 2(t - \sqrt{x}\,L(t + \sqrt{x})) =$$

$$= 2\sqrt{y} - 2\sqrt{x}\,L(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$\int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2\sqrt{x-a} - 2\sqrt{x}\,L\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}$$

$$I = 2\int_a^1 \left(\sqrt{x-a} - \sqrt{x}\,L\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$2\int_a^1 \sqrt{x-a}\,dx = \frac{4}{3}\left((x-a)^{\frac{3}{2}}\right)_a^1 = \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}}.$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int \sqrt{x}\,L\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\int L\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}\right) d\left(x^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,L\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}\right) - \int \frac{a}{3\sqrt{x-a}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}\right)}\,dx$$

$$\int_a^1 \sqrt{x}\,L\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}L(1 + \sqrt{1-a}) - \frac{1}{3}\int_a^1 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a}{x}}}{\sqrt{x-a}}\,x\,dx$$

$$I = \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}L(1 + \sqrt{1-a}) + \frac{2}{3}\int_a^1 \left(\frac{(x-a) + a}{\sqrt{x-a}} - \sqrt{x}\right)dx =$$

$$= 4\,\frac{4-a}{9}\sqrt{1-a} - \frac{4}{9}(1 - a\sqrt{a}) - \frac{4}{3}L(1 + \sqrt{1-a}).$$

Si $a = 0$, $I_0 = \frac{4}{3}(1 - L2)$.

58. Si ρ, ω sont les coordonnées polaires du point P, on a $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{\rho}$, dans l'intégrale double $\iint (\varphi - \sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\omega$, si on remplace ρ par $\frac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, φ variera de π à 0, lorsque ρ varie de a à ∞.

On aura :

$$d\rho = -\frac{a}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\varphi}{2}$$

$$I = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} (\varphi - \sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\omega = \pi a^2 \int_0^\pi (\varphi - \sin\varphi)\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi$$

$$\int (\varphi - \sin\varphi)\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = \int (\varphi - \sin\varphi)\,d\,\frac{-1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\varphi - \varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} + \int \frac{1 - \cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = \frac{\sin\varphi - \varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} + 2\varphi.$$

Lorsque φ tend vers zéro $\frac{\sin\varphi - \varphi}{\varphi^3} = \frac{-1}{6} + \frac{\varphi^2}{2.3.4.5}\ldots$ a pour limite $\frac{-1}{6}$, $\frac{\sin\varphi - \varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ tend vers zéro.

$I = \pi^2 a^2$.

59. Si on change y en $-y$, l'élément de l'intégrale ne change pas, elle est donc égale à :

$$I = 2\iint \frac{dx\,dy}{x\sqrt{y}}$$

où $$1 < x < 2, \quad 0 < y < \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$I = 4\int_1^2 \frac{dx}{x}\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{4}}$$

ou, en remplaçant x en fonction de y :

$$x = 2\sqrt{1 - y^2}, \quad dx = \frac{-2y\,dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$I = 4\int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \frac{y\sqrt{y}}{1 - y^2}\,dy = 4\int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} y^{\frac{3}{2}}(1 + y^2 + y^4 + \ldots)\,dy =$$

$$= 6\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9}\,\frac{3}{4} + \frac{1}{13}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{17}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots\right) = 2{,}36\sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 2{,}2.$$

CHAPITRE III

—

FONCTIONS ANALYTIQUES
INTÉGRALES CURVILIGNES

60. Entre les fonctions u et v, des variables x et y, on doit avoir :

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta(u-v)}{\delta x} = \frac{2-(\cos x - \sin x)e^{y} - (\cos x + \sin x)e^{-y}}{(2\cos x - e^{y} - e^{-y})^2}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta(u-v)}{\delta y} = \frac{-2+(\cos x + \sin x)e^{y} + (\cos x - \sin x)e^{-y}}{(2\cos x - e^{y} - e^{-y})^2}$$

$$(1) \quad \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{2-(e^{y}+e^{-y})\cos x}{(2\cos x - e^{y} - e^{-y})^2}, \quad \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x}{(2\cos x - e^{y} - e^{-y})^2},$$

Si x est constant, on a :

$$u = \int \frac{\delta u}{\delta y}\, dy = \frac{\sin x}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}} + f(x)$$

en calculant $\frac{\delta u}{\delta x}$, on trouve $f'(x) = 0$, $f(x)$ est constant.

Si

$$u = \frac{\sin x}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}, \quad v = \frac{e^{-y} - \cos x}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}.$$

On aurait pu vérifier que les dérivées secondes $\frac{\delta^2 u}{\delta xy}$ et $\frac{\delta^2 u}{\delta yx}$, déduites des expressions (1), sont égales ; c'est la condition pour que le problème soit possible. Mais cela résulte de l'expression obtenue pour u.

$$u + vi = \frac{ie^{-y} - ie^{xi}}{e^{xi} + e^{-xi} - e^{y} - e^{-y}} = \frac{i(e^{-y} - e^{xi})}{(e^{-y} - e^{xi})(e^{y-xi} - 1)} = \frac{i}{e^{-i(x+yi)} - 1}$$

la solution générale est

$$f(z) = \frac{i}{e^{-iz} - 1} + c$$

il faut :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{-i-1} + c = 0, \quad c = \frac{1+i}{2}$$

$$f(z) = \frac{i}{e^{-iz}-1} + \frac{1+i}{2} = \frac{1-i}{2}\,\frac{e^{zi}-i}{e^{zi}-1}$$

$$\int_0^z \frac{dz}{f(z)} = (1+i)\int_0^z \frac{e^{zi}-1}{e^{zi}-i}\,dz =$$

$$= \int_0^z \left(1 + i - \frac{2}{e^{zi}-i}\right) dz = (1+i)z - 2\int_0^z \frac{e^{-zi}}{1-ie^{-zi}}\,dz =$$

$$= (1+i)z + 2\mathrm{L}\,\frac{1-ie^{-zi}}{1-i}.$$

Pour $z = 0$, $\mathrm{L}1$ est supposé nul. La fonction $\frac{e^{zi}-1}{e^{zi}-i}$ n'a que des pôles simples $z = 2\mathrm{K}\pi + \frac{\pi}{2}$, $e^{zi} = i$, pour lesquels le résidu est la valeur de $(e^{zi}-1)\dfrac{z - 2\mathrm{K}\pi + \frac{\pi}{2}}{e^{zi}-i}$, qui prend la valeur $(i-1)\frac{1}{ie^{zi}}$, ou $1-i$.

$\int \frac{dz}{f(z)}$ autour d'un pôle, dans le sens positif est

$$(1+i)(1-i)\,2\pi i = 4\pi i,$$

L'intégrale sera augmentée de $4n\pi i$ si on fait le tour de n pôles dans le sens positif.

61. Si on pose $u = \operatorname{arc\,tg} z$, on a : $z = \operatorname{tg} u = \dfrac{e^{ui} - e^{-ui}}{i(e^{ui} + e^{-ui})}$

$$zi = \frac{e^{2ui}-1}{e^{2ui}+1}, \quad e^{2ui} = \frac{1+zi}{1-zi} = \frac{i-z}{i+z}$$

$$u = \frac{i}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{i+z}{i-z}.$$

Si $u = 0$ pour $z = 0$, et si z décrit un contour à partir de 0, $\frac{i+z}{i-z}$ décrit un contour correspondant partant de la valeur 1, duquel on déduit la valeur du logarithme, en posant $\frac{i+z}{i-z} = \rho e^{\omega i}$

et $L\frac{i+z}{i-z} = L\rho + i\omega$, où ω varie d'une façon continue. La fonction arc tg z a ainsi les points singuliers $z = \pm i$. $L(1+z)$ ou $L(1-z)$ changeant de valeur lorsque z fait le tour de l'un de ces points.

Si z décrit la droite qui joint les points 0 et $1+i$, $1-z$ décrit la droite qui joint les points 1 et $-i$; $\sqrt{1-z}$ décrit une arc d'hyperbole qui joint les points 1 et $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. On peut poser :

$$z = (1+i)t, \quad \sqrt{1-(1+i)t} = X + Yi, \quad X^2 - Y^2 = 1 - t,$$
$$2XY = -t = X^2 - Y^2 - 1.$$

Cette hyperbole a les asymptotes $Y = X\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$, les deux points sont sur la même branche, comme on peut le prévoir.

Entre cet arc d'hyperbole et les droites joignant ses extrémités à l'origine, il n'y a aucun des points singuliers $\pm i$. La fonction arc tg v, où $v = \sqrt{1-z}$, aura la même valeur, si au lieu d'aller du point 1 à $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ par l'arc d'hyperbole, on suit l'axe réel de 1 à 0, puis la droite qui joint 0 à $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Sur l'axe réel, arc tg v varie de arc tg $1 = \frac{\pi}{4}$ à arc tg $0 = 0$. Il reste à étudier la variation de arc tg v de $v = 0$ à $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, on a : arc tg $v = \frac{i}{2} L\frac{i+v}{i-v}$.

Soit $v = (1-i)t$, t variant de 0 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{i+v}{i-v} = \frac{t+i(1-t)}{-t+i(1+t)} = \frac{1-2t^2-2ti}{1+2t^2+2t} = X + Yi$$
$$X = \frac{1-2t^2}{1+2t+2t^2}, \quad Y = \frac{-2t}{1+2t+2t^2}$$
$$X^2 + (Y-1)^2 = 2.$$

Lorsque t varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, le point (X, Y) décrit un arc de cercle du point 1 au point $i\left(1-\sqrt{2}\right)$, cercle de centre i, de rayon $\sqrt{2}$. Si on pose $\frac{i+v}{i-v} = \rho e^{\omega i}$, ρ varie de 1 à $\sqrt{2}-1$, et ω de 0

à $-\frac{\pi}{2}$. On a ainsi, lorsque $z = 1 + i$,

$$u = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{-i} = \frac{i}{2}\,\mathrm{L}i\left(1 - \sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\,\mathrm{L}\left(\sqrt{2} + 1\right).$$

On peut aussi effectuer les transformations suivantes :

$$u = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1 - z}, \quad z = 1 - \operatorname{tg}^2 u = \frac{2\cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

$$\sin\left(2u - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2u = \frac{z}{z - 2}$$

$$u = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{z}{z - 2}$$

si $z = (1 + i)t$ décrit la droite de $t = 0$ à 1,
$\frac{z}{z-2} = \frac{(1+i)t}{(1+i)t - 2} = \frac{1-i}{2} + \frac{1 + i(t-1)}{t - 2 + it}$ décrit un arc de cercle de centre $\frac{1-i}{2}$, de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, qui joint les points 0 et $-i$; cet arc est situé dans l'angle des axes négatifs, car

$$\frac{(1+i)t}{(1+i)t - 2} = t\,\frac{-(1-t) - i}{(t-1)^2 + 1}.$$

Comme la fonction $\arcsin z = -i\mathrm{L}\left(zi + \sqrt{1 - z^2}\right)$ n'a que les points singuliers $z = \pm 1$, la variation sur l'arc de cercle est la même que sur la corde qui joint les deux points 0, $-i$; car il n'y a pas de points singuliers entre ces deux contours.

Alors $z = yi$, $\arcsin(yi) = -i\mathrm{L}\left(-y + \sqrt{1 + y^2}\right)$ comme y varie de 0 à -1, pour $y = -1$, on a :

$$u = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{-i} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(-i) = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\,\mathrm{L}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

62. Supposons $|z| < 5$ et $\sqrt{z+5}$ positif pour $z = 0$. $\sqrt{z+5}$ conserve une valeur bien déterminée, son argument reste compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ tant que la partie réelle de z reste supérieure à -5. L'intégrale prise sur le cercle $z = 4e^{\omega i}$, dans le sens direct, est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus des deux pôles

$z = 1$, $z = 2$, intérieurs au cercle. Soit $z = 1 + t$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^2(t-1)^3\sqrt{6+t}} =$$

$$= \frac{-1}{t^2\sqrt{6}}(1-t)^{-3}\left(1+\frac{t}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{t^2\sqrt{6}}(1+3t+6t^2+\ldots)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t}{6}+\frac{1.3}{2.4}\frac{t^2}{36}+\ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{35}{12t}+\ldots\right)$$

Si $z = 2 + t$, on aura :

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^3\sqrt{7}}(1+t)^{-2}\left(1+\frac{t}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{t^3\sqrt{7}}(1-2t+3t^2-4t^3+\ldots)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t}{7}+\frac{1.3}{2.4}\frac{t^2}{49}-\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\frac{1}{t^3}-\frac{29}{14t^2}+\left(3+\frac{59}{8.49}\right)\frac{1}{t}-\ldots\right]$$

Les résidus sont $-\dfrac{35}{12\sqrt{6}}$ et $\left(3+\dfrac{59}{8.49}\right)\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

L'intégrale est égale à $\left(\dfrac{6}{\sqrt{7}}+\dfrac{59}{196\sqrt{7}}-\dfrac{35}{6\sqrt{6}}\right)\pi i$

63. Supposons $\sqrt{z^2+2}$ ayant la valeur $+\sqrt{2}$ pour $z = 0$, il y a 4 points singuliers $z = \pm i$, $z = \pm i\sqrt{2}$. Aucun n'est compris dans la circonférence de centre $\dfrac{2+i}{4}$ qui passe aux points 0, 1 et $\dfrac{i}{2}$. Il en résulte que, sur l'arc de cette circonférence, et sur la corde, qui vont de $z = 0$ à 1, les intégrales, ont la même valeur. z étant réel, posons $x = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int\frac{dt}{(1+2\,\mathrm{tg}^2\,t)\cos t} = \int\frac{\cos t\,dt}{1+\sin^2 t} =$$

$$= \mathrm{arc\,tg}\,(\sin t) = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236.$$

La circonférence de centre $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} i$, qui passe par les points 0, 1, $\frac{4}{3} i$, comprend, à l'intérieur, le point $z = i$. L'intégrale, sur l'arc qui joint les points 0, $\frac{4}{3} i$ et 1, est égale à l'intégrale, sur la corde $0\ 1$, augmentée de l'intégrale autour du point singulier $z = i$, prise dans le sens négatif, qui est égale à $-2\pi i$ multiplié par le résidu, ou par la valeur de

$$\frac{1}{(z+i)\sqrt{z^2+2}} = \frac{1}{2i}.$$

On a alors, sur cet arc :

$$u = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi = -2{,}6180.$$

Il faut, en effet, remarquer que les points $z = \pm i\sqrt{2}$ sont hors du cercle ; lorsque z décrit l'axe imaginaire $z = yi$

$$\sqrt{z^2+2} = \sqrt{2-y^2},$$

de $y = 0$ à 1, $\sqrt{2-y^2}$ varie de $+\sqrt{2}$ à 1, $\sqrt{2-y^2}$ reste positif tant que z n'atteint pas l'un des points singuliers, et $\sqrt{z^2+2}$ prend la valeur $+1$ au point $z = i$. L'intégrale sur la corde 0, 1, suivie de l'arc 1, 0, qui comprend le point $z = i$ à l'intérieur, serait égale à l'intégrale $+\pi$ prise autour de ce point singulier.

64. On a

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2+y^2+z^2)(dx+dy) - \int x^2 dx - \int y^2 dy = \\ &= -\frac{x^3+y^3}{3} + \int (x^2+y^2+z^2) d(x+y). \end{aligned}$$

Il faut donc

$$x^2+y^2+z^2 = f(x+y), \qquad I = -\frac{x^3+y^3}{3} + \int f(x+y) d(x+y).$$

Si $z = y^2$ pour $x = 0$, on a :

$$f(y) = y^2 + y^4$$
$$\int f(y)dy = \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}$$
$$z^2 = (x+y)^4 + (x+y)^2 - x^2 - y^2 = (x+y)^4 + 2xy$$
$$I = -\frac{x^3+y^3}{3} + \frac{(x+y)^3}{3} + \frac{(x+y)^5}{5} = xy(x+y) + \frac{(x+y)^5}{5}.$$

On peut également exprimer que

$$(y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy$$

est une différentielle exacte ;

$$y + z\frac{\partial z}{\partial y} = x + z\frac{\partial z}{\partial x},$$

la résolution de cette équation aux dérivées partielles conduit au même résultat.

65. Supposons d'abord $\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}$ réel, et négatif, lorsque z est réel et supérieur à 1. Lorsque z reste extérieur à la circonférence de rayon 1, z faisant en même temps le tour des deux points singuliers 0 et 1, ce radical reste uniforme, car si z fait un tour l'argument de $z^{\frac{2}{5}}$ a augmenté de $\frac{2}{5}2\pi$, celui de $(1-z)^{\frac{3}{5}}$ de $\frac{3}{5}2\pi$, l'argument du produit aura augmenté de 2π, ce produit, multiplié par $e^{2\pi i}$, n'aura pas changé. Sur tout cercle de rayon supérieur à 2, l'intégrale a la même valeur, car il n'y a plus de point singulier. Cette valeur est nulle, ce que l'on voit en faisant augmenter le rayon indéfiniment. Si $z = \rho e^{\omega i}$, le module de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{\omega i} i d\omega}{(\rho e^{\omega i} - 2)\sqrt[5]{\rho^2 e^{2\omega i}(1 - \rho e^{\omega i})^3}}$$

est plus petit que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho d\omega}{(\rho - 2)\sqrt[5]{\rho^2(\rho - 1)^3}} = \frac{2\pi}{\rho - 2}\sqrt[5]{\left(\frac{\rho}{\rho - 1}\right)^3}$$

qui tend vers zéro, pour $\rho = \infty$.

2° Soit un contour formé d'un cercle c_1 de rayon compris

entre 1 et 2, décrit dans le sens direct, et d'un cercle c_2 de rayon plus grand que 2, décrit dans le sens inverse. Si on réunit ces deux cercles par une coupure formée de deux rayons infiniment voisins, qui seront décrits dans des sens opposés, la fonction restant uniforme, puisque $|z| > 1$, les deux intégrales sur ces rayons se détruisent. Mais le contour fermé ainsi obtenu peut se transformer, sans jamais traverser un point singulier, en un contour qui entoure le pôle $z = 2$ dans le sens négatif. Le résidu de ce pôle est la valeur de $\frac{1}{\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$ pour $z = 2$, ou, d'après les conventions faites, $\frac{-1}{\sqrt[5]{4}}$. On a donc

$$\int_{c_1} - \int_{c_2} = \frac{2\pi i}{\sqrt[5]{4}} = \pi i \sqrt[5]{8}, \qquad \int_{c_2} = 0, \qquad \int_{c_1} = \pi i \sqrt[5]{8}.$$

3° Formons $\int \frac{dz}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$ le long d'un contour formé de l'axe réel de $z = \varepsilon$ à $1 - \varepsilon$, en supposant $\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}$ réel et positif. Puis un demi-cercle au-dessus du point 1, l'axe réel de $1 + \varepsilon$ à une valeur r comprise entre 1 et 2, le cercle c_1 décrit dans le sens positif, l'axe réel de r à $1 + \varepsilon$, un demi-cercle au-dessous de $z = 1$, l'axe réel de $1 - \varepsilon$ à ε, et un cercle de rayon ε, pour revenir au point initial ε. Dans l'intérieur la fonction conserve une valeur bien déterminée, et l'intégrale sur tout le contour est nulle, car il n'y a pas de point singulier à l'intérieur. Sur les cercles de centres 0 et 1, et de rayon ε, les intégrales tendent vers 0 avec ε, car si $z = \varepsilon e^{\omega i}$,

$$\frac{dz}{\sqrt[5]{z^2}} = \varepsilon^{\frac{3}{5}} e^{\frac{3}{5}\omega i} i d\omega,$$

si $z = 1 + \varepsilon e^{\omega i}$

$$\frac{dz}{\sqrt[5]{(z-1)^3}} = \varepsilon^{\frac{2}{5}} e^{\frac{2}{5}\omega i} i d\omega.$$

Les deux parties d'intégrales entre $1 + \varepsilon$ et r, décrit en sens inverses, se détruisent ; puisque le radical reprend la même valeur quand on a décrit le cercle c_1. De ε à $1 - \varepsilon$, on suppose $\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}$ réel et

positif. Sur le cercle de centre 1, on a :

$$z = 1 + \varepsilon e^{\omega i}, \quad 1 - z = \varepsilon e^{(\omega - \pi) i}, \quad \sqrt[5]{(1-z)^3} = \varepsilon^{\frac{3}{5}} e^{3\frac{\omega - \pi}{5} i},$$

ω variant de $+\pi$ à 0, car ce demi-cercle est décrit dans le sens négatif, pour $z = 1 + \varepsilon$

$$\sqrt[5]{(1-z)^3} = \varepsilon^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{3}{5}\pi i} = -\varepsilon^{\frac{3}{5}} e^{\frac{2}{5}\pi i}.$$

La valeur $\int_{c_1}$ avait été calculée en partant de la valeur $-\varepsilon^{\frac{3}{5}}$ pour ce radical. On aura donc ici

$$\int_{c_1} = \pi i \sqrt[5]{8}\, e^{-\frac{2}{5}\pi i}.$$

Après avoir décrit le cercle c_1, le radical conserve la même valeur. Mais, quand on décrit l'autre demi-cercle autour de $z = 1$, ω continue à diminuer de π, et arrive à la valeur $-\pi$. Lorsque $z = x$,

$$0 < x < 1, \qquad \sqrt[5]{(1-x)^3} = (1-x)^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{6}{5}\pi i},$$

où $(1-x)^{\frac{3}{5}}$ est la valeur réelle. On a ainsi pour l'intégrale, sur tout le contour :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} + \pi i \sqrt[5]{8}\, e^{-\frac{2}{5}\pi i} + \\ + e^{\frac{6}{5}\pi i} \int_1^0 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} = 0$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}} = \frac{\pi i \sqrt[5]{8}\, e^{\frac{3}{5}\pi i}}{1 - e^{\frac{6}{5}\pi i}} = \\ = \frac{-\pi i \sqrt[5]{8}}{e^{\frac{3\pi i}{5}} - e^{-\frac{3\pi i}{5}}} = \frac{-\pi \sqrt[5]{8}}{2 \sin \frac{3\pi}{5}} = -\pi \sqrt[5]{8} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}.$$

Cette valeur de $\sin \frac{3\pi}{8}$ peut s'obtenir en exprimant que

$$\sin\left(5 \cdot \frac{3\pi}{5}\right) = 0.$$

66. Si $|z| > 1$ on peut développer suivant les puissances de $\frac{1}{z}$

$$\frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right)$$
$$= z^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3z} + \frac{3}{8z^2} + \ldots$$

$z = \infty$ est un pôle, d'ordre 2. Le résidu est le coefficient $\frac{1}{3}$ de $\frac{-1}{z}$.

On peut vérifier qu'en posant $z = \frac{1}{t}$ on a

$$\int \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz = \int \frac{-1}{t^4(1+t)} e^t dt = \int \left(-\frac{1}{t^4} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t} - \frac{3}{8} + \ldots\right) dt$$

pour $t = 0$ le résidu est $\frac{1}{3}$.

$\int \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, sur un cercle de rayon supérieur à 1, a une valeur constante ; qui est la valeur sur un cercle de rayon infini. Si z décrit un cercle dans le sens direct, le sens est inverse par rapport à la partie extérieure, ou $z = \infty$. L'intégrale est égale à $-\frac{2}{3}\pi i$.

67. La fonction

$$u = 1 - e^{x^2} + x \int_0^x e^{y^2} dy$$

est nulle pour $x = 0$, sa dérivée

$$u' = -2xe^{x^2} + \int_0^x e^{y^2} dy + xe^{x^2} = -xe^{x^2} + \int_0^x e^{y^2} dy < 0$$

car

$$\int_0^x e^{y^2} dy < e^{x^2} \int_0^x dy < xe^{x^2}.$$

u reste négatif.

On a un contour formé de ox de o à a, la droite $x = a$ sur laquelle $z = a + yi$, de $y = o$ à a, et la bissectrice $y = x$ sur laquelle $z = (1 + i)t$ de $t = a$ à o. Sur ce contour $\int e^{-z^2} dz$ est nulle, car il n'y a pas de points singuliers intérieurs. On a :

$$\int_0^a e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{y^2 - 2ayi - a^2} i dy + \int_a^0 e^{-2it^2}(1 + i) dt = 0.$$

Le second terme a un module plus petit que

$$e^{-a^2}\int_0^a e^{y^2}dy < e^{-a^2}\frac{e^{a^2}-1}{a} = \frac{1-e^{-a^2}}{a} < \frac{1}{a}$$

qui tend vers zéro, pour $a = \infty$. On a ainsi, à la limite :

$$(1+i)\int_0^\infty e^{-2ix^2}dx = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$4\int_0^\infty (\cos 2x^2 - i\sin 2x^2)dx = (1-i)\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty \cos(2x^2)dx = \int_0^\infty \sin(2x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

68 $$\int \frac{2+x}{(1+x)^2}dx = \int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx =$$

$$= \mathrm{L}(1+x) - \frac{1}{1+x}$$

$$\int_0^\xi \frac{2+x}{(1+x)^2}dx = 1 - \frac{1}{1+\xi} + \mathrm{L}(1+\xi) = \frac{\xi}{1+\xi} + \mathrm{L}(1+\xi)$$

$$\int_0^z \left(\frac{\xi}{1+\xi} + \mathrm{L}(1+\xi)\right)d\xi = z\mathrm{L}(1+z).$$

Pour préciser la valeur de cette fonction, on peut poser

$$z = -1 + \rho e^{\omega i}, \qquad z\mathrm{L}(1+z) = z(\mathrm{L}\rho + i\omega)$$

où $\omega = 0$, $\rho = 1$, pour $z = 0$, lorsqu'on suit un chemin déterminé, ω varie d'une façon continue, et reste déterminé en chaque point, si la courbe ne passe pas par le point singulier $z = -1$. Les diverses valeurs, obtenues au point z, s'obtiennent en ajoutant $2\mathrm{K}\pi iz$, K étant un nombre entier positif ou négatif, qui représente le nombre de tours du point -1.

Si $\int_0^\xi$ peut être prise suivant un chemin quelconque, qui correspond au chemin c, précédé d'un certain nombre de tours du point

— 1. On peut avoir

$$\int_0^\xi \frac{2+x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\xi}{1+\xi} + \mathrm{L}(1+\xi) + 2\mathrm{K}\pi i$$

et
$$f(z) = z\mathrm{L}(1+z) + 2\mathrm{K}\pi i z.$$

Les valeurs que peut prendre $f(z)$ sont les mêmes, on peut ajouter $2\mathrm{K}\pi i z$, où K représente l'ensemble du nombre de tours du point z, faits par la variable ξ, et par la variable z.

69. Une chaînette, symétrique par rapport à oy, a pour équation

$$y = c + \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

elle passe par les deux points $z = i$, $x = 0$, $y = 1$, et

$$z = 1 + \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)i, \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right),$$

si l'on a : $c = 1 - \frac{1}{a}$

et
$$e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{1}{a}\left(e^a + e^{-a} - 2\right) = 2\left(\frac{a}{2} + \frac{a^3}{2.3.4} + \ldots\right)$$

équation qui a la seule solution $a = 1$. On a la chaînette :

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$dy = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})dx$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 dx^2$$

$$s = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$s = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots = 1{,}175$$

70. La fonction $\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1}$ a les pôles simples $z = \pm\sqrt[3]{n}$ pour

lesquels $e^{2\pi i z^3} = 1$, n étant un nombre entier. Le résidu du pôle $z = \sqrt[3]{n}$ est la valeur de $z^3 \dfrac{z - \sqrt[3]{n}}{e^{2\pi i z^3} - 1}$, ou de

$$\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} \times 6\pi i z^2} = \frac{z}{6\pi i} = \frac{\sqrt[3]{n}}{6\pi i}.$$

$z = 0$ n'est pas un point singulier. La somme des résidus des deux pôles $+\sqrt[3]{n}$ et $-\sqrt{n}$ est nulle. Il en résulte que l'intégrale I est nulle sur le cercle de centre o. Sur le contour fermé comprenant le demi-cercle décrit dans le sens direct, on a :

$$I = \frac{-i}{6\pi}(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[3]{p}),$$

somme des résidus des p pôles intérieurs au contour.

71. Sur la demi-circonférence $z = Re^{\omega i}$, on a : $dz = Re^{\omega i} i d\omega$ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{R^3 e^{3\omega i} i d\omega}{R^4 e^{4\omega i} + R^2 e^{2\omega i} + 1}$ dont le module est inférieur à

$$\int_0^\pi \frac{R^3 d\omega}{R^4 - R^2 - 1} = \frac{\pi R^3}{R^4 - R^2 - 1}$$

et tend vers o, pour $R = \infty$. Il reste

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1} = 2\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

qui est égale à la somme des intégrales prises autour des pôles intérieurs au contour fermé, ou au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de ces pôles. Le dénominateur $z^4 + z^2 + 1$ est nul si $(z^2 + 1)^2 = z^2$, $z^2 \pm z + 1 = 0$, $z = \dfrac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Il y a deux pôles intérieurs au contour fermé :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Pour chacun d'eux le résidu est la limite de $z^2 \dfrac{z - z_0}{z^4 + z^2 + 1}$ ou la valeur de $\dfrac{z^2}{4z^3 + 2z} = \dfrac{z^3}{4z^4 + 2z^2} = \dfrac{-z^3}{4 + 2z^2}$.

Pour $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$ le résidu est

$$\frac{-e^{\pi i}}{4 + 2e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{1}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - i}{4\sqrt{3}}.$$

Pour $z = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, le résidu est $\dfrac{-1}{4 + 2e^{\frac{4\pi i}{3}}} = \dfrac{-1}{3 - i\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{4\sqrt{3}}$.

La somme des résidus est $\dfrac{-i}{2\sqrt{3}}$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{,}906.$$

72. Soit $p + qi = \text{arc sin}\,(x + yi)$

$$x + yi = \sin\,(p + qi) = \sin p \cos qi + \cos p \sin qi =$$

$$= \sin p\,\frac{e^q + e^{-q}}{2} + i \cos p\,\frac{e^q - e^{-q}}{2}$$

p, q, x, y étant réels, on a :

$$x = \sin p\,\frac{e^q + e^{-q}}{2}, \qquad y = \cos p\,\frac{e^q - e^{-q}}{2}.$$

En éliminant q, on a :

$$(x \cos p)^2 - (y \sin p)^2 = (\sin p \cos p)^2$$
$$\sin^4 p - (1 + x^2 + y^2) \sin^2 p + x^2 = 0$$

$\sin^2 p$ a deux valeurs séparées par 0, 1, $+\infty$, on a donc

$$\sin p = \pm \sqrt{\frac{1 + x^2 + y^2 - \sqrt{(1 + x^2 + y^2)^2 - 4x^2}}{2}},$$

comme $e^q + e^{-q} > 0$, $\sin p$ doit avoir le signe de x. On a ainsi pour p des valeurs de la forme $p_1 + 2k\pi$ ou $\pi - p_1 + 2k\pi$, à chaque valeur de p correspond pour q une seule valeur, donnée par l'équation

$$e^q = \frac{x}{\sin p} + \frac{y}{\cos p}.$$

En particulier, si $x = 0$, on a $\sin p = 0$, $p = k\pi$ et, dans ce cas, $e^q - e^{-q} = \dfrac{2y}{\cos p}$ détermine q. Si, pour $z = 0$, on a

arc sin $0 = \pi$, p conservera la valeur π tant que z décrit l'axe oy. On a alors

$$e^q - e^{-q} = -2y, \qquad e^{2q} + 2ye^q - 1 = 0$$

comme e^q doit être positif, on a

$$e^q = -y + \sqrt{1 + y^2}$$
$$q = \mathrm{L}(-y + \sqrt{1 + y^2})$$
$$\text{arc sin}\,(yi) = \pi + i\mathrm{L}(-y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Lorsque $y = 1$, le logarithme étant réel, on a :

$$\text{arc sin}\, i = \pi + i\mathrm{L}(\sqrt{2} - 1) = \pi - i\mathrm{L}(1 + \sqrt{2}).$$

Tandis que, par des contours arbitraires, cette fonction peut prendre les valeurs

$$2k\pi + i\mathrm{L}(1 + \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad 2k\pi + \pi - i\mathrm{L}(1 + \sqrt{2}).$$

On pourrait encore se servir de la formule :

$$\text{arc sin}\, z = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{1 - z^2}}.$$

Si, pour $z = 0$, arc sin $0 = \pi$, $\sqrt{1 - z^2}$ qui représente le cosinus de arc sin z est négatif, et l'on aura

$$\text{arc sin}\, z = \pi - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$\sqrt{1 - z^2}$ partant de la valeur $+1$. On a alors, si $z = yi$

$$\text{arc sin}\, i = \pi - \int_0^1 \frac{i\,dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \pi - i\Big(\mathrm{L}(y + \sqrt{1 + y^2})\Big)_0^1 =$$
$$= \pi - i\mathrm{L}(1 + \sqrt{2})$$

73. Si y est constant, x prenant l'accroissement dx,

$$\mathrm{F}(x + dx, y) - \mathrm{F}(x, y) = \iint f(u, v)\, du\, dv$$

dans une aire comprise entre les ordonnées des points x et $x + dx$.

y variant de y à x sur la bissectrice. Cette intégrale se réduit à

$$dx \int_y^x f(x, v)\, dv,$$

donc

$$\frac{\delta F}{\delta x} = \int_y^x f(x, v)\, dv = -\int_x^y f(x, v)\, dv$$
$$\frac{\delta^2 F}{\delta x y} = -f(x, y).$$

La solution générale de l'équation

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x y} + f(x, y) = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires,

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \int_y^x f(x, v)\, dv + \varphi'(x).$$

Sur la bissectrice de l'angle xoy, on a $y = x$, et $F(x, y)$ devient nul, on doit donc avoir :

$$\varphi(x) + \psi(x) = x^2$$
$$\varphi'(x) = e^x, \quad \varphi(x) = e^x, \quad \psi(x) = x^2 - e^x$$
$$\psi(y) = y^2 - e^y$$
$$z = e^x + y^2 - e^y + \iint f(u, v)\, du\, dv.$$

74. Pour $z = 0$, prenons la valeur réelle $-\sqrt[3]{6}$ du radical. Si on considère la droite qui joint les points $z = 1$ et 3 comme une coupure, que l'on ne peut pas traverser, entre ces deux points, $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$ reste une fonction uniforme, qui reprend la même valeur pour chaque valeur de z. Sur tout contour fermé qui entoure les 3 points l'intégrale a la même valeur. Supposons que la variable z décrive un cercle de centre $z = 2$, et de rayon

supérieur à 1, on pourra poser :

$$z = 2 + u, \quad u = \rho\, e^{\omega i}$$

$$\int \frac{(1 + z + z^2)\,dz}{\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}} = \int \frac{u^2 + 5u + 7}{\sqrt[3]{u(u^2-1)}}\,du =$$

$$= \int \frac{u^2 + 5u + 7}{u\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}}\,du.$$

Pour $z = 0$, $u = -2$, $\sqrt[3]{u(u^2-1)} = u\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}$ doit prendre la valeur $-\sqrt[3]{6}$, et $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}$ reste réel et positif lorsque u prend des valeurs réelles entre -1 et $-\infty$. Si $|u| > 1$ on peut développer $\frac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}}$ suivant les puissances de $\frac{1}{u}$.

$$\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3u^2} + \frac{1.4}{3.6}\frac{1}{u^4} + \frac{1.4.7}{3.6.9}\frac{1}{u^6} \cdots$$

$$\int \frac{u^2 + 5u + 7}{u\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}}\,du = \int u\left(1 + \frac{5}{u} + \frac{7}{u^2}\right)\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{-\frac{1}{3}} du =$$

$$= \int \left(u + 5 + \frac{22}{3u} + \frac{5}{3u^2} + \frac{23}{9u^3} + \ldots\right) du.$$

Lorsque u décrit un cercle de rayon supérieur à 1, $\int u\,du = \frac{u^2}{2}$ est nulle $\int du = u$ est aussi nulle, parce que ces fonctions sont uniforme,

$$\int \frac{du}{u} = \int_0^{2\pi} i\,d\omega = 2\pi i.$$

Il reste

$$\frac{44}{3}\pi i + \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{3\rho e^{\omega i}} + \frac{23}{9\rho^2 e^{2\omega i}} + \ldots\right) i\,d\omega.$$

La valeur est indépendante du rayon ρ. Si on fait augmenter ρ indéfiniment, on voit qu'elle est égale à $\frac{44}{3}\pi i$.

75. En posant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, on a :

$$\frac{(x\,dx + y\,dy)\,\mathrm{L}(x^2 + y^2) + x^2(x\,dy - y\,dx)}{(x^2 + y^2)^2} = 2\,\frac{\mathrm{L}\rho}{\rho^3}\,d\rho + \cos^2\omega\,d\omega$$

$$\int \left(2\,\frac{\mathrm{L}\rho}{\rho^3}\,d\rho + \frac{1 + \cos 2\omega}{2}\,d\omega\right) = -\frac{\mathrm{L}\rho}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho^2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{4}.$$

Lorsque le point $\mathrm{M}(x, y)$ se déplace, à partir de $\mathrm{A}(1, 0)$, sans passer par o, $\mathrm{L}\rho$ reste une fonction uniforme, qui, en particulier, est constante sur un cercle de centre o. Quand on décrit un cercle autour de o, $\frac{\omega}{2}$ augmente de π. On a donc :

$$\mathrm{I} = -\frac{\mathrm{L}\rho}{\rho^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\rho^2} + \pi + \frac{\omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{4} =$$

$$= \frac{-\mathrm{L}(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - 1}{2(x^2 + y^2)} + \frac{xy}{2(x^2 + y^2)} + \pi + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

où $\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

76. $$\frac{1}{1 - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2} = \frac{1}{(1 - xe^{(\alpha-\beta)i})(1 - xe^{(\beta-\alpha)i})} =$$

$$= \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)i}}{1 - xe^{(\alpha-\beta)i}} - \frac{e^{(\beta-\alpha)i}}{1 - xe^{(\beta-\alpha)i}}\right)\frac{1}{e^{(\alpha-\beta)i} - e^{(\beta-\alpha)i}} =$$

$$= \frac{1}{2i\sin(\alpha - \beta)}\left[\sum_0^\infty x^n e^{(n+1)(\alpha-\beta)i} - \sum_0^\infty x^n e^{(n+1)(\beta-\alpha)i}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i\sin(\alpha - \beta)}\sum_0^\infty 2x^n i\sin(n + 1)(\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)}(\sin(\alpha - \beta) + x\sin 2(\alpha - \beta) + \ldots +$$
$$+ x^{n-1}\sin n(\alpha - \beta) + \ldots)$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi}\frac{\alpha\,d\alpha}{1 - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2} = \sum_{n=1}^\infty x^{n-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin n(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}\alpha\,d\alpha$$

$$\frac{\sin nz}{\sin z} = \frac{e^{nzi} - e^{-nzi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = e^{(n-1)zi} + e^{(n-3)zi} + \ldots + e^{(1-n)zi} =$$
$$= 2\cos(n - 1)z + 2\cos(n - 3)z + \ldots$$

le dernier terme étant $2\cos z$ si n est pair, et 1 si n est impair.

Si p est un nombre entier

$$\int_0^{2\pi} \alpha \cos p(\alpha - \beta) d\alpha = \left[\frac{\alpha}{p} \sin p(\alpha - \beta) + \frac{1}{p^2} \cos p(\alpha - \beta)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{-2\pi}{p} \sin p\beta$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha \frac{\sin 2n(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} d\alpha =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \alpha[\cos(2n-1)(\alpha-\beta)+\cos(2n-3)(\alpha-\beta)+\ldots+\cos(\alpha-\beta)]d\alpha =$$

$$= -4\pi\left(\frac{\sin(2n-1)\beta}{2n-1} + \frac{\sin(2n-3)\beta}{2n-3} + \ldots + \sin\beta\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha \frac{\sin(2n+1)(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} d\alpha =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \alpha\left[\cos 2n(\alpha-\beta) + \ldots + \cos 2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\right] d\alpha =$$

$$= -4\pi\left(\frac{\sin 2n\beta}{2n} + \frac{\sin 2(n-1)\beta}{2(n-1)} + \ldots + \frac{\sin 2\beta}{2}\right) + 2\pi^2$$

$$I = 2\pi^2(1+x^2+x^4+\ldots) - 4\pi[x\sin\beta + x^2\frac{\sin 2\beta}{2} + x^3\left(\frac{\sin 3\beta}{3} + \sin\beta\right) +$$

$$+ \ldots + x^n\left(\frac{\sin n\beta}{n} + \frac{\sin(n-2)\beta}{n-2} + \ldots\right) + \ldots] =$$

$$= \frac{2\pi^2}{1-x^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta}{n}(x^n + x^{n+2} + x^{n+4} + \ldots) =$$

$$= \frac{2\pi}{1-x^2}[\pi - 2(x\sin\beta + \frac{x^2}{2}\sin 2\beta + \ldots + \frac{x^n}{n}\sin n\beta + \ldots)].$$

Si on pose

$$x(\cos\beta + i\sin\beta) = z,$$

on a

$$-L(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2}L(1+x^2-2x\cos\beta) + i\operatorname{arctg}\frac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta} = \sum_1^{\infty}\frac{x^n}{n}(\cos n\beta + i\sin n\beta)$$

$$\sum_1^{\infty}\frac{x^n}{n}\sin n\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\beta}{1-x\cos\beta}$$

où l'on doit supposer $-1 < x < 1$, l'arc étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha d\alpha}{1 - 2x\cos(\alpha - \beta) + x^2} = \frac{4\pi}{1 - x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\beta}{1 - x\cos\beta}\right) =$$
$$= \frac{4\pi}{1 - x^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1 - x\cos\beta}{x\sin\beta}$$

ce dernier arc étant compris entre o et π.

77. On a :

$$p + q\frac{y^2 - x^2}{2xy} + (x^2 + y^2)^2 = 0$$

p et q étant deux fonctions réelles de x et y.

Si on prend les dérivées partielles par rapport à x et à y, en tenant compte des relations :

$$\frac{\delta p}{\delta x} = \frac{\delta q}{\delta y}, \qquad \frac{\delta p}{\delta y} = -\frac{\delta q}{\delta x}$$

on a :

$$\frac{\delta q}{\delta y} + \frac{\delta q}{\delta x}\frac{y^2 - x^2}{2xy} - q\frac{y^2 + x^2}{2x^2y} + 4x(x^2 + y^2) = 0$$
$$-\frac{\delta q}{\delta x} + \frac{\delta q}{\delta y}\frac{y^2 - x^2}{2xy} + q\frac{y^2 + x^2}{2xy^2} + 4y(x^2 + y^2) = 0.$$

Et, en résolvant par rapport aux dérivées de q

$$\frac{\delta q}{\delta y} = \frac{q}{y} - 8xy^2$$
$$\frac{\delta q}{\delta x} = \frac{q}{x} + 8yx^2.$$

On peut facilement vérifier que ces équations vérifient la condition $\frac{\delta^2 q}{\delta yx} = \frac{\delta^2 q}{\delta xy}$, pour que le problème soit possible. Mais cela résulte aussi de la suite du calcul. On a :

$$dq = \frac{\delta q}{\delta x}dx + \frac{\delta q}{\delta y}dy = q\frac{ydx + xdy}{xy} + 8xy(xdx - ydy).$$

Si on pose $q = xyv$

$$dq - vd(xy) = xydv = dq - q\frac{d(xy)}{xy} = 4xyd(x^2 - y^2)$$

$$v = 4(x^2 - y^2) + 2c$$

$$q = 4xy(x^2 - y^2) + 2cxy$$

$$p = q\frac{x^2 - y^2}{2xy} - (x^2 + y^2)^2 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c(x^2 - y^2)$$

$$u = p + qi = x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 + c(x^2 + 2xyi - y^2) =$$
$$= (x + yi)^4 + c(x + yi)^2 = z^4 + cz^2$$

où c est une constante réelle.

On peut aussi éviter de former les dérivées, en cherchant les relations qui existent entre les quantités réelles x, y, p, q, et les imaginaires $z = x + yi$, $u = p + qi$. On a :

$$u = -(x^2 + y^2)^2 + q\frac{x^2 + 2xyi - y^2}{2xy} = q\frac{z^2}{2xy} - z^2(x - yi)^2$$

$$\frac{u}{z^2} = \frac{q}{2xy} - (x - yi)^2 = \frac{q}{2xy} + z^2 - 2(x^2 - y^2)$$

$$\frac{u}{z^2} - z^2 = \frac{q}{2xy} - 2(x^2 - y^2).$$

Une fonction imaginaire ne peut être identiquement égale à une fonction réelle, que si elle est égale à une constante réelle, ce qui donne

$$u = z^4 + cz^2 = (x + yi)^4 + c(x + yi)^2$$
$$p = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c(x^2 - y^2)$$
$$q = 4xy(x^2 - y^2) + 2cxy.$$

78. Cette intégrale est la somme des intégrales autour des deux points $z = 0$ et 1. Autour du point $z = 0$, on a :

$$\int_c = \int_c (a + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3)e^{\frac{1}{z}}dz =$$
$$= \int_c (a + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right)dz.$$

En effectuant le produit, on a des intégrales qui sont des fonctions uniformes, et ont une variation nulle sur le cercle c, sauf le terme

$$\left(a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{24}\right)\int_c \frac{dz}{z} = \left(a + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{24}\right)2\pi i.$$

De même, autour du point $z = 1$, on a, en posant $z - 1 = t$

$$\int_c (a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3) e^{\frac{1}{z-1}} dz =$$

$$= \int_c \left(a + a_1(1+t) + a_2(1 + 2t + t^2) + a_3(1 + 3t + 3t^2 + t^3)\right) e^{\frac{1}{t}} dt =$$

$$= \left(a + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{2} + \frac{a_2 + 3a_3}{6} + \frac{a_3}{24}\right) \int \frac{dz}{z-1} =$$

$$= \left(a + \frac{3}{2} a_1 + \frac{13}{6} a_2 + 3a_3 + \frac{a_3}{24}\right) 2\pi i$$

$$\int_c (a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz =$$

$$= (4a + 4a_1 + \frac{14}{3} a_2 + \frac{37}{6} a_3)\pi i.$$

79. $F(z)$ est la somme des intégrales prises autour de chacun des points singuliers intérieurs au cercle c, dont le nombre est limité. Soit $u = a$ un de ces points, $f(u)$ peut se développer en séries de puissances positives et négatives de $u - a$. Soit

$$f(u) = P(u - a) + \frac{B_1}{u - a} + \frac{B_2}{(u - a)^2} + \ldots = P(u - a) + Q(u - a).$$

La série $Q(u - a)$ est convergente pour toute valeur de z, sauf $u = a$. Autour du point $u = a$, sur un cercle ne contenant aucun autre point singulier intérieur, on a :

$$\int e^{uz} f(u) du = \int e^{az}(1 + z(u - a) + \frac{z^2(u - a)^2}{2} + \ldots) Q(u - a) du =$$

$$= e^{az}(B_1 + zB_2 + \frac{z^2}{1.2} B_3 + \frac{z^3}{1.2.3} B_4 + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} B_{n+1} + \ldots) 2\pi i$$

c'est une fonction entière, car la série $\sum B_n z^n$ est convergente pour toute valeur de z, et aussi $\sum \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} B_n$.

$F(z)$ est la somme d'un nombre fini de fonctions analogues, pour chaque point singulier, c'est une fonction entière.

2° $\int e^{uz} f(u) du$ sur le cercle c est égal à $\int e^{uz} Q(u - a) du$ sur tout contour fermé comprenant $u = a$, et aussi sur c. On peut ainsi remplacer $f(u)$ par la somme des fonctions $Q(u - a)$ qui corres-

pondent à chacun des points singuliers. Cette somme est une fonction n'ayant pas d'autres points singuliers à distance finie.

3° En remplaçant e^{uz} par la série $1 + uz + \frac{u^2z^2}{2} + \ldots$, on peut faire le produit des deux séries, u restant sur le cercle c qui fait partie du domaine $z = \infty$, car il n'y a pas de point singulier extérieur. En laissant les intégrales qui donnent des fonctions uniformes, il reste les termes contenant

$$\int_c \frac{du}{u} = 2\pi i$$

et

$$\int_c e^{uz} f(u)du = \left(A_1 + \frac{A_2}{2} z + \frac{A_3}{2.3} z^2 + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n} z^{n-1} + \ldots\right)2\pi i.$$

4° Si $f(u)$ est un polynome, $F(z) = 0$. En retranchant un polynome, on ramène $P(u)$ au degré $q - 1$. Si $u = a$ est une racine d'ordre n de $Q(u) = 0$, en décomposant $\frac{P(u)}{Q(u)}$ en fractions simples, on a les termes

$$\frac{B_1}{u-a} + \frac{B_2}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{B_n}{(u-a)^n}$$

et dans $F(z)$,

$$e^{az}\left(B_1 + B_2 z + \ldots + B_n \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\right)2\pi i.$$

De même pour chaque racine de Q. Il en résulte que $F(z)$, où les coefficients B seraient arbitraires, est la solution générale d'une équation différentielle linéaire, pour laquelle $Q(a) = 0$ est l'équation caractéristique qui permet de déterminer les coefficients a des solutions e^{az}.

5° Si $Q(u)$ admet les racines a, b ..., on aura

$$F(z) = \sum e^{az}(c_1 + c_2 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1})$$

la racine a étant d'ordre n, et les coefficients c arbitraires

80. $$f(z) = \frac{z+1}{(z-t)(z-1)^2(z^2+1)},$$

il y a 3 pôles simples $z = t$ et $\pm i$, et un pôle double $z = 1$. Il doit y avoir aussi 5 zéros, qui sont $z = -1$, et $z = \infty$ qui est un zéro d'ordre 4.

2° Les résidus sont :

pour $z = i$,

$$\frac{1+i}{(i-t)(i-1)^2(i+i)} = \frac{1+i}{4(i-t)}$$

pour $z = -i$,

$$-\frac{1-i}{4(i+t)}$$

pour $z = t$,

$$\frac{t+1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1} = \frac{t+1}{(t-1)^2(t^2+1)}.$$

Pour $z = 1$, on peut poser $z = 1 + u$

$$f(z) = \frac{2+u}{u^2(1-t+u)(2+2u+u^2)} =$$

$$= \frac{2+u}{2u^2(1-t)}\left(1-\frac{u}{1-t}+\ldots\right)(1-u+\ldots) = \frac{1}{1-t}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{t-3}{2(1-t)u}+\ldots\right).$$

Le résidu est $\frac{t-3}{2(1-t)^2}$.

$\int f(z)dz$ est égal au produit par $2\pi i$ de chacun de ces résidus.

3° La somme de ces intégrales est égale à l'intégrale sur un cercle assez grand pour contenir les 4 pôles. Mais, $z^3 f(z)$ tend vers zéro, pour $z = \infty$. Il en résulte que $\int f(z)dz$ tend vers zéro sur un cercle de rayon infini, cette intégrale est donc nulle sur tout cercle qui comprend les 4 pôles. En écrivant que la somme des résidus est nulle, on a :

$$\frac{t+1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1} = \frac{1+i}{4(t-i)} + \frac{1-i}{4(t+i)} + \frac{3-t}{2(1-t)^2} = \frac{t-1}{2(t^2+1)} + \frac{3-t}{2(t-1)^2}$$

$$\int \frac{t+1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1} = \frac{1}{4}\mathrm{L}(t^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{2}\mathrm{L}(t-1) - \frac{1}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{L}\,\frac{t^2+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{t-1}.$$

81.

$$u = \int_\infty^z \frac{dz}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^4}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{5z^5} - \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{9z^9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{13z^{13}} - \ldots.$$

Si on pose

$$\frac{1}{z} = -u + c_1 u^2 + c_2 u^3 + \ldots,$$

en substituant, et exprimant que les deux membres sont identiques, on voit que l'expression de $\frac{1}{z}$ se réduit à la forme

$$\frac{1}{z} = -u + au^5 + bu^9 + cu^{13} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^5} = -u^5 + 5au^9 + 5(b - 2a^2)u^{13} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^9} = -u^9 + 9au^{13} + \ldots, \qquad \frac{1}{z^{13}} = -u^{13} + \ldots$$

On aura, en identifiant l'expression de u :

$$a = -\frac{1}{10}, \qquad b = \frac{a}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{120},$$

$$c = \frac{b}{2} - a^2 - \frac{9a}{24} - \frac{5}{13.16} = -\frac{11}{13.1200}$$

$$\frac{1}{z} = -u - \frac{u^5}{10} - \frac{u^9}{120} - \frac{11}{13.1200}u^{13} - \ldots$$

$$uz = \frac{-1}{1 + \frac{u^4}{10} + \frac{u^8}{120} + \frac{11}{13.1200}u^{12} + \ldots}$$

$$= -1 + \frac{u^4}{10} + \frac{u^8}{120} + \frac{11}{13.1200}u^{12} - \frac{u^8}{100} - \frac{u^{12}}{600} + \frac{u^{12}}{1000} + \ldots$$

$$z = \frac{-1}{u} + \frac{u^3}{10} - \frac{u^7}{600} + \frac{u^{11}}{26000} - \ldots.$$

82. Le point $z = a$ est intérieur au contour c, pour avoir son résidu, posons $z = a + t$

$$\frac{1}{(z-a)^n(z-b)^n} = \frac{1}{t^n(t+a-b)^n} = \frac{1}{t^n(a-b)^n}\left(1 - \frac{t}{b-a}\right)^{-n} =$$

$$= \frac{1}{t^n(a-b)^n}\left(1 + \frac{n}{1}\frac{t}{b-a} + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{t}{b-a}\right)^2 \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{n-1} + \ldots\right)$$

$$R = \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{(-1)^n}{(b-a)^{2n-1}}.$$

L'intégrale prise sur c, dans le sens direct, est égale à $2\pi R i$.

83. Le pôle

$$z = i(a + \sqrt{a^2 + 1})$$

est extérieur au cercle de rayon 1, le pôle

$$z = -i(\sqrt{a^2 + 1} - a)$$

est intérieur.

Pour $\frac{1}{z^2 - 2azi + 1}$ le résidu de ce pôle est la valeur de

$$\frac{1}{z - i(a + \sqrt{a^2 + 1})} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{-2i\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\int_c \frac{dz}{z^2 - 2azi + 1} = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Posons

$$-i(\sqrt{a^2 + 1} - a) = \alpha, \qquad i(\sqrt{a^2 + 1} + a) = \beta, \qquad z = \alpha + t$$

$$\frac{z^2 + 1}{(z^2 - 2azi + 1)^2} = \frac{1 + (\alpha + t)^2}{t^2(t + \alpha - \beta)^2} = \frac{1 + \alpha^2 + 2\alpha t + t^2}{t^2(\alpha - \beta)^2}\left(1 - 2\frac{t}{\alpha - \beta} + \ldots\right).$$

Le résidu

$$R = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2}\left(2\alpha - 2\frac{1 + \alpha^2}{\alpha - \beta}\right) = -2\frac{1 + \alpha\beta}{(\alpha - \beta)^3} = \frac{i}{2(1 + a^2)\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\int_c \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 2azi + 1)^2}\, dz = \frac{-\pi}{(1 + a^2)\sqrt{1 + a^2}}.$$

2° Si φ varie de 0 à 2π, $z = e^{\varphi i}$ décrit le cercle c

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + i\cos\varphi} = \int_c \frac{1}{a + \frac{i}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{zi} = \int_c \frac{-2dz}{z^2 - 2azi + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(a + i\cos\varphi)^2} = \int_c \frac{2i(1 + z^2)dz}{(z^2 - 2azi + 1)^2} = \frac{-2\pi i}{(1 + a^2)\sqrt{1 + a^2}}.$$

Séries. — 84.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 - 4)^2} = \frac{1}{3(z^2 - 4)}\left(\frac{1}{z^2 - 4} - \frac{1}{z^2 - 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3(z^2 - 4)^2} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1 - z^2} - \frac{1}{4 - z^2}\right).$$

Si $|z| < 1$, on a :

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{4-z^2} = \frac{1}{4} + \frac{z^2}{4^2} + \frac{z^4}{4^3} + \ldots + \frac{z^{2n}}{4^{n+1}} + \ldots$$

$$\frac{1}{(4-z^2)^2} = \frac{1}{4^2}\left(1 + 2\frac{z^2}{4} + 3\frac{z^4}{4^2} + 4\frac{z^6}{4^3} + \ldots + \frac{n+1}{4^n} z^{2n} + \ldots\right)$$

$$f(z) = \sum_0^\infty \left(-1 + \frac{3n+7}{4^{n+2}}\right)\frac{z^{2n}}{9}.$$

Si $1 < |z| < 2$,

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{-1}{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} \ldots$$

$$f(z) = \frac{1}{9}\sum_1^\infty \frac{1}{z^{2n}} + \sum_0^\infty \frac{3n+7}{4^{n+2}} \cdot \frac{z^{2n}}{9}.$$

Si $|z| > 2$,

$$\frac{1}{4-z^2} = -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{z^4} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{(4-z^2)^2} = \frac{1}{z^4}\left(1 + 2\frac{4}{z^2} + 3\frac{4^2}{z^4} + \ldots\right)$$

$$f(z) = \sum_3^\infty \left[(3n-7)4^{n-2} + 1\right]\frac{1}{9z^{2n}}.$$

85. Les coefficients de la fonction

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

peuvent se déduire des intégrales :

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Soit

$$f(x) = \mathrm{L}\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\quad \cos\frac{x}{2} > 0 \quad \text{si } -\pi < x < \pi.$$

En remplaçant x, soit par $\pi - y$, soit par $y - \pi$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right) dy = \int_{\pi}^{2\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx$$

et

$$\int_0^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) + \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{L}(2 \sin x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{y}{2}\right) \frac{dy}{2}.$$

Donc

$$\int_0^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \mathrm{L}\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{0} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) dx = 0$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \sin nx\, dx = 0,$$

car, si on change x en $-x$, $\cos \frac{x}{2}$ ne change pas, et $\sin nx$ change de signe.

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \cos nx\, dx.$$

En intégrant par partie, on a :

$$\int \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \cos nx\, dx = \frac{\sin nx}{n} \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right) + \int \frac{\sin nx}{2n} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\, dx.$$

Pour $x = \pm \pi$, $\cos \frac{x}{2}$ s'annule, mais le produit $\sin nx\, \mathrm{L}\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ tend vers zéro, et

$$\pi a_n = \frac{1}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \operatorname{tg} \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{4n} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{nxi} - e^{-nxi}) \frac{1 - e^{xi}}{1 + e^{xi}}\, dx.$$

Si on pose

$$e^{xi} = z, \quad a_n = \frac{1}{4\pi n} \int \frac{z^{2n} - 1}{z^n} \cdot \frac{1 - z}{1 + z} \frac{dz}{zi}$$

intégrale prise sur le c de rayon 1, à l'intérieur duquel il y a le seul pôle $z = 0$,

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^{n+1}} \frac{1 - z}{1 + z} = \frac{1}{z^{n+1}} (-1 + 2z - 2z^2 + 2z^3 + \ldots + 2z^{2n-1} - z^{2n})$$

cette fraction, pour $z = 0$, a le résidu $2(-1)^{n+1}$, et

$$\int_c \frac{z^{2n} - 1}{z + 1} \frac{1 - z}{z^{n+1}} dz = 4\pi i (-1)^{n+1}$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\mathrm{L}\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n} + \ldots, -\pi < x < \pi.$$

La fonction $\mathrm{L}(2 \cos \frac{x}{2})$ a une dérivée $-\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ qui ne change de signe que pour $x = 0$ et $x = \pm \pi$, elle reste finie, sauf pour $x = \pm \pi$, ce qui suffit pour que le développement en série de Fourier soit possible.

Si on pose $x = 2\mathrm{K}\pi + y$, $\cos \frac{x}{2} = (-1)^{\mathrm{K}} \cos \frac{y}{2}$, mais la série ne change pas de valeur, lorsque x est augmenté de $2\mathrm{K}\pi$. On a donc, quelque soit x,

$$\mathrm{L} \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| = \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{x} + \ldots$$

pour $x = (2\mathrm{K} + 1)\pi$ les deux membres deviennent égaux à $-\infty$; pour toutes les autres valeurs de x, la série est convergente.

On peut encore déduire cette série du développement de la fonction

$$\mathrm{L}(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots$$

où $\mathrm{L}1 = 0$, pour $z = 0$, et $|z| < 1$. Si on pose $z = \rho e^{\omega i}$

$$\mathrm{L}(1 + \rho \cos \omega + i\rho \sin \omega) = \frac{1}{2} \mathrm{L}(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \omega) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho \sin \omega}{1 + \rho \cos \omega}.$$

Si $1 + z = re^{\alpha i}$, $L(1 + z) = Lr + \alpha i$ où α restera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; car, pour $z = 0$, $\alpha = 0$, $r = 1$ et z ne sort pas du cercle de rayon 1. Si ρ tend vers 1, on a :

$$L\left(1 + e^{\omega i}\right) = L\left(e^{\frac{\omega}{2} i} . 2 \cos \frac{\omega}{2}\right) = L\left(2 \cos \frac{\omega}{2}\right) + \frac{i\omega}{2} =$$
$$= e^{\omega i} - \frac{1}{2} e^{2\omega i} + \frac{1}{3} e^{3\omega i} \ldots$$

En égalant les parties réelles, on a :

$$L\left(2 \cos \frac{\omega}{2}\right) = \cos \omega - \frac{\cos 2\omega}{2} + \ldots, -\frac{\pi}{2} < \frac{\omega}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

86. Si on pose $z = \frac{i}{2} + t$, on a : $\frac{1}{2} < |t| < \frac{3}{2}$:

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}\right) = \frac{1}{2i\left(t - \frac{i}{2}\right)} - \frac{1}{2i\left(t + \frac{3i}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{t + \frac{3i}{2}} = \frac{2}{3i\left(1 - \frac{2it}{3}\right)} = \frac{2}{3i}\left(1 + \frac{2it}{3} + \left(\frac{2it}{3}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{t - \frac{i}{2}} = \frac{1}{t\left(1 - \frac{i}{2t}\right)} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{i}{2t} + \left(\frac{i}{2t}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1 + 2zi}{3}\right)^n - \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-1}{1 + 2zi}\right)^n.$$

La première série converge si $\left|z - \frac{i}{2}\right| < \frac{3}{2}$, la seconde si $\left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}$, de sorte que ce double développement suppose z compris entre les deux cercles de l'énoncé.

CHAPITRE IV

—

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

87. En supposant d'abord le second membre nul, si on pose $y = cx^a$ on a, en divisant par cx^a :

$$a(a-1)(a-2) + a(a-1) - 2a + 2 = 0$$
$$(a-1)(a^2 - a - 2) = 0$$
$$(a-1)(a-2)(a+1) = 0$$
$$y = Ax + Bx^2 + \frac{C}{x}.$$

Dans l'équation complète, substituons cette expression de y, où A, B, C sont des fonctions de x, en posant :

$$x\frac{dA}{dx} + x^2\frac{dB}{dx} + \frac{1}{x}\frac{dC}{dx} = 0$$
$$\frac{dA}{dx} + 2x\frac{dB}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dC}{dx} = 0$$

On a alors :

$$\frac{dy}{dx} = A + 2Bx - \frac{C}{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2B + \frac{2C}{x^3}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\frac{dB}{dx} + \frac{2}{x^3}\frac{dC}{dx} - \frac{6C}{x^4}$$

et

$$x^3\left(2\frac{dB}{dx} + \frac{2}{x^3}\frac{dC}{dx}\right) = \frac{1}{x^2} + 4x^3 \sin x + x^4 \cos x.$$

On a ainsi trois équations linéaires qui déterminent $\frac{dA}{dx}$, $\frac{dB}{dx}$, $\frac{dC}{dx}$:

$$-2x^2\frac{dA}{dx} = 3x^3\frac{dB}{dx} = 6\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^2} + 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

$$A = \frac{1}{6x^3} - \frac{x^2}{2}\sin x + x\cos x - \sin x$$

$$B = \frac{-1}{12x^4} + \frac{x}{3}\sin x - \cos x$$

$$C = \frac{-1}{6x} + \frac{x^4}{6}\sin x$$

la solution particulière

$$y = Ax + Bx^2 + \frac{C}{x} = -\frac{1}{12x^2} - x \sin x$$

Et la solution générale

$$y = -\frac{1}{12x^2} - x \sin x + Ax + Bx^2 + \frac{C}{x}$$

où A, B, C sont trois constantes arbitraires.

88. Formons le système d'équations homogènes

$$\frac{du}{dx} = u + v - w, \quad \frac{dv}{dx} = -2u + 3v - w, \quad \frac{dw}{dx} = -3u + 2w$$

et

$$\frac{d(au + bv + cw)}{dx} = (a - 2b - 3c)u + (a + 3b)v + (-a - b + 2c)w$$

déterminons les constantes a, b, c de façon que les coefficients de u, v, w soient proportionnels à a, b, c

$$\frac{a - 2b - 3c}{a} = \frac{a + 3b}{b} = \frac{-a - b + 2c}{c} = \lambda$$

$$a(1 - \lambda) - 2b - 3c = 0$$
$$a + (3 - \lambda)b = 0$$
$$a + b + c(\lambda - 2) = 0$$

λ sera donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & -2, & -3 \\ 1, & 3 - \lambda, & 0 \\ 1, & 1, & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0.$$

On a les trois solutions

$$\lambda = 2, \qquad a = -b = 3c$$
$$\lambda = 2 + \sqrt{2}, \qquad b = -c = a(1 + \sqrt{2}) = \frac{a}{\sqrt{2} - 1}$$
$$\lambda = 2 - \sqrt{2}, \qquad b = -c = a(1 - \sqrt{2}) = \frac{-a}{\sqrt{2} + 1}.$$

Du système d'équations données, on déduit ainsi :

$$\frac{d(3u - 3v + w)}{dx} = 2(3u - 3v + w) + 23 \cos x + \sin x$$

$$\frac{d(u\sqrt{2} - u + v - w)}{dx} =$$

$$= (2 + \sqrt{2})(u\sqrt{2} - u + v - w) + (2\sqrt{2} - 5)\cos x - (1 + \sqrt{2})\sin x.$$

Or l'équation

$$\frac{dy}{dx} = ay + A\cos x + B\sin x$$

a une intégrale de la forme $y = ce^{ax} + A'\cos x + B'\sin x$

où $\quad B' = aA' + A, \quad -A' = aB' + B$

$$y = ce^{ax} - \frac{Aa + B}{a^2 + 1}\cos x - \frac{Ba - A}{a^2 + 1}\sin x$$

$$3u - 3v + w = ce^{2x} - \frac{47}{5}\cos x + \frac{21}{5}\sin x$$

$$u(\sqrt{2} - 1) + v - w =$$

$$= c'e^{(2+\sqrt{2})x} + \left(\frac{33 - 14\sqrt{2}}{17}\right)\cos x - \frac{47 - 39\sqrt{2}}{17}\sin x.$$

Et en changeant $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$, on a :

$$-u(\sqrt{2} + 1) + v - w =$$

$$= c''e^{(2-\sqrt{2})x} + \left(\frac{33 + 14\sqrt{2}}{17}\right)\cos x - \frac{47 + 39\sqrt{2}}{17}\sin x.$$

On en déduit :

$$u = \frac{c'}{2\sqrt{2}}e^{(2+\sqrt{2})x} - \frac{c''}{2\sqrt{2}}e^{(2-\sqrt{2})x} - \frac{14}{17}\cos x + \frac{39}{17}\sin x$$

$$v = -\frac{c}{2}e^{2x} + \frac{\sqrt{2} - 1}{4}c'e^{(2+\sqrt{2})x} - \frac{1 + \sqrt{2}}{4}c''e^{(2-\sqrt{2})x} + \frac{247}{85}\cos x + \frac{134}{85}\sin x$$

$$w = -\frac{c}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}c'e^{(2+\sqrt{2})x} - \frac{3}{4}c''e^{(2-\sqrt{2})x} + \frac{152}{85}\cos x + \frac{174}{85}\sin x.$$

89. En posant $y = x^a$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = ax^{a-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a(a-1)(a-2)x^{a-3}.$$

L'équation, où le second membre serait nul, donne, en divisant par x^a :

$$a(a-1)(a-2)+15a(a-1)+61\,a+64=0$$
$$a^3+12a^2+48a+64=0, \qquad (a+4)^3=0$$

ce qui donne la solution $y=cx^{-4}$. Pour savoir quelles solutions correspondent aux racines multiples, on peut faire le changement de variable $x=e^t$, qui donne :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}x^2+\frac{dy}{dx}x,$$
$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d^3y}{dx^3}x^3+3\frac{d^2y}{dx^2}x^2+\frac{dy}{dx}x, \quad \text{et} \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},$$

pour déterminer y en fonction de t on arrive ainsi à une équation linéaire, pour laquelle la racine triple $a=-4$ donne les solutions :

$$y=e^{-4t}(c+c't+c''t^2) \quad \text{ou} \quad y=x^{-4}(c+c'\mathrm{L}x+c''\mathrm{L}^2x).$$

Pour avoir une solution particulière de l'équation complète donnée, on peut poser $y=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$, et :

$$(64-61+2\times 15-6)\frac{A}{x}+B(64-2\times 61+6\times 15-24)\frac{B}{x^2}=$$
$$=\frac{33}{x}+\frac{8}{x^2}.$$

$A=\frac{11}{9}$, $B=1$, la solution générale est :

$$y=\frac{11}{9x}+\frac{1}{x^2}+x^{-4}(c+c'\mathrm{L}x+c''\mathrm{L}^2x).$$

90. En éliminant y et z, on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}=2x+y+z=2x+\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{d^2x}{dt}-\frac{dx}{dt}-2x=0$$

équation linéaire, dont les solutions sont de la forme

$$x=e^{at}, \qquad a^2-a-2=0, \qquad (a+1)(a-2)=0$$
$$x=Ae^{-t}+Be^{2t}$$
$$\frac{dy}{dt}=x+\frac{dx}{dt}-y, \qquad \frac{dy}{dt}+y=3Be^{2t}$$

équation dont la solution générale est

$$y = Ce^{-t} + Be^{2t}$$
$$z = \frac{dx}{dt} - y = -(A + C)e^{-t} + Be^{2t}$$

Pour $t = 0$, on doit avoir :

$$A + B = \alpha, \quad C + B = \beta, \quad -A - C + B = \gamma.$$

Donc :

$$3A = 2\alpha - \beta - \gamma, \quad 3B = \alpha + \beta + \gamma, \quad 3C = 2\beta - \alpha - \gamma$$

$$x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} e^{2t} + \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{3} e^{-t}$$
$$y = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} e^{2t} + \frac{2\beta - \alpha - \gamma}{3} e^{-t}$$
$$z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} e^{2t} + \frac{2\gamma - \alpha - \beta}{3} e^{-t}$$
$$(\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)y + (\alpha - \beta)z = 0$$

ce plan passe toujours par la droite

$$x = y = z$$

91. La méthode de Laplace, pour résoudre les équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes en x, du premier degré, consiste à poser :

$y = \int_c f(z)\, e^{zx}\, dz$, intégrale prise sur un contour fixe, indépendant de x.

$$\frac{dy}{dx} = \int_c f(z)\, e^{zx}\, z dx, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int_c f(z)\, e^{zx}\, z^2\, dx$$
$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - xy = \int_c f(z)\, e^{zx}\, (xz^2 - 4z - x)\, dz.$$

Cette intégrale représente la fonction $f(z)\, e^{zx}\, (z^2 - 1)$ si l'on choisit $f(z)$ de façon que

$$f'(z)(z^2 - 1) + 2zf(z) = -4zf(z)$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-6z}{z^2 - 1}, \quad f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^3}.$$

L'intégrale $\int \frac{e^{zx}}{(z^2-1)^3}(xz^2-4z-x)\,dz = \frac{e^{zx}}{(z^2-1)^2}$ est une fonction uniforme ; sur tout contour fermé qui ne passe pas par les points $z = \pm 1$ cette intégrale est nulle, $y = \int_c \frac{e^{zx}}{(z^2-1)^3}\,dz$ est une intégrale de l'équation donnée. Si le contour comprend le seul point singulier $z = 1$, l'intégrale est égale à $2\pi i$ multiplié par le résidu de $\frac{e^{zx}}{(z^2-1)^3}$. Si on pose $z = 1 + t$, on a :

$$\frac{e^{zx}}{(z^2-1)^3} = \frac{1}{t^3(2+t)^3}e^{x(1+t)} = \frac{1}{8t^3}e\left(1+tx+\frac{t^2x^2}{2}\cdots\right)\left(1-3\frac{t}{2}+\frac{3.4}{1.2}\frac{t^2}{4}\cdots\right) =$$

$$= \frac{e^x}{8}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2x-3}{2t^2}+\frac{x^2-3x+3}{2t}\cdots\right)$$

$$R = \frac{e^x}{16}(x^2-3x+3).$$

Pour $z = -1$, on a de même $R_1 = \frac{-e^{-x}}{16}(x^2+3x+3)$.

L'intégrale générale est ainsi :

$$y = c\,e^x(x^2-3x+3) + c'\,e^{-x}(x^2+3x+3).$$

Deuxième méthode. On a successivement :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - xy = 0,\ x\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 0,\ x\frac{d^5y}{dx^3} - \frac{d^4y}{dx^4} - x\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$x\frac{d^6y}{dx^6} - x\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

En ajoutant la première et la dernière équations, on a :

$$x\left(\frac{d^6y}{dx^6} - \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} - y\right) = 4\left(\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx}\right) = 2x\left(\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} - 3\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

équation dont la solution générale est

$$y = e^x(ax^2+bx+c) + e^{-x}(a'x^2+b'x+c')$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(ax^2+bx+c+2ax+b) - e^{-x}(a'x^2+b'x+c'-2a'x-b')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(ax^2+bx+c+4ax+2b+2a) + e^{-x}(a'x^2+b'x+c'-4a'x-2b'+2a')$$

y sera une solution de l'équation donnée, si l'on a les identités :

$$(6a + 2b)\,x + 4(b + c) = 0$$
$$(6a' - 2b')\,x + 4(b' - c') = 0$$
$$c = -b = 3a, \quad c' = b' = 3a'.$$

92. Si x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 sont des systèmes de solution des équations :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y\sqrt{1-k^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x\sqrt{1-k^2} - kz, \qquad \frac{dz}{dt} = ky,$$

on a

$$x_1\frac{dx_2}{dt} + x_2\frac{dx_1}{dt} = (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{1-k^2}$$
$$y_1\frac{dy_2}{dt} + y_2\frac{dy_1}{dt} = -(y_1x_2 + y_2x_1)\sqrt{1-k^2} - (y_1z_2 + y_2z_1)k$$
$$z_1\frac{dz_2}{dt} + z_2\frac{dz_1}{dt} = (z_1y_2 + z_2y_1)k.$$

La somme est nulle ; $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, ayant une dérivée nulle, reste constant. On a aussi :

$$\frac{d}{dt}(y_1z_2 - z_1y_2) = \sqrt{1-k^2}\,(z_1x_2 - x_1z_2)$$
$$\frac{d}{dt}(z_1x_2 - x_1z_2) = \sqrt{1-k^2}\,(z_1y_2 - z_2y_1) + k(y_1x_2 - x_1y_2)$$
$$\frac{d}{dt}(x_1y_2 - y_1x_2) = k(z_1x_2 - x_1z_2)$$

qui montrent que x_3, y_3, z_3 forment un système de solutions.

2° Des équations (1) on déduit :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\sqrt{1-k^2}\,\frac{dx}{dt} - k\frac{dz}{dt} = -y.$$

Equation qui a la solution générale :

$$y = \mathrm{A}\cos t + \mathrm{B}\sin t$$
$$z = \int ky\,dt = \mathrm{A}k\sin t - \mathrm{B}k\cos t + c$$
$$x = \frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}\left(kz + \frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{1-k^2}\,(\mathrm{A}\sin t - \mathrm{B}\cos t) - \frac{kc}{\sqrt{1-k^2}}.$$

On aura, en particulier

$$x_1 = \sqrt{1-k^2}\cos t, \qquad y_1 = -\sin t, \qquad z_1 = k\cos t$$
$$x_2 = \sqrt{1-k^2}\sin t, \qquad y_2 = \cos t, \qquad z_2 = k\sin t$$
$$x_3 = -k, \qquad y_3 = 0, \qquad z_3 = \sqrt{1-k^2}.$$

3° Si la première équation (1) est remplacée par

$$\frac{dx}{dt} - y\sqrt{1-k^2} = \varphi(t)$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\sqrt{1-k^2}\left(y\sqrt{1-k^2} + \varphi(t)\right) - k^2y = -y - \varphi(t)\sqrt{1-k^2}.$$

Si on pose

$$y = u\cos t + v\sin t,$$

où u et v sont deux fonctions de t, et

$$u'\cos t + v'\sin t = 0,$$

on en déduit :

$$y' = -u\sin t + v\cos t, \qquad y'' = -u\cos t - v\sin t - u'\sin t + v'\cos t$$
$$y'' + y = -u'\sin t + v'\cos t = -\varphi(t)\sqrt{1-k^2}$$
$$\frac{u'}{\sin t} = \frac{v'}{-\cos t} = \varphi(t)\sqrt{1-k^2}$$
$$u = \int \varphi(t)\sin t\sqrt{1-k^2}\,dt, \qquad v = -\int \varphi(t)\cos t\sqrt{1-k^2}\,dt.$$

En particulier, si

$$\varphi(t) = -a\sqrt{1-k^2}\sin(kt),$$

on a :

$$u = a(k^2-1)\int \sin t\sin kt\,dt = a\frac{k^2-1}{2}\int(\cos(k-1)t - \cos(k+1)t)\,dt =$$
$$= \frac{a}{2}(k+1)\sin(k-1)t - \frac{a}{2}(k-1)\sin(k+1)t + A$$
$$v = a(1-k^2)\int \cos t\sin kt\,dt = a\frac{1-k^2}{2}\int(\sin(k-1)t + \sin(k+1)t)\,dt =$$
$$= \frac{a}{2}(k+1)\cos(k-1)t + \frac{a}{2}(k-1)\cos(k+1)t + B$$
$$y = u\cos t + v\sin t = a\sin kt + A\cos t + B\sin t.$$

Ce résultat peut aussi se déduire de l'équation

$$y'' + y = a(1 - k^2) \sin kt$$

en faisant la substitution

$$y = c \sin kt.$$

On a ensuite :

$$z = \int kydt = -a \cos kt + Ak \sin t - Bk \cos t + c$$

$$x = \frac{-1}{\sqrt{1-k^2}}\left(kz + \frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{1-k^2}\,(A \sin t - B \cos t) - \frac{kc}{\sqrt{1-k^2}}.$$

93. Si, dans l'équation sans second membre, on pose $y = x^n$, on a, en divisant par x^n :

$$n(n-1)(n-2) + 2(1-a)n(n-1) + a^2(n-1) = 0$$
$$(n-1)(n^2 - 2an + a^2) = 0$$

ce qui donne les solutions $y = x$, $y = x^a$, et $y = x^a \mathrm{L}x$.

Si, dans l'équation complète, on pose

$$y = Ax\mathrm{L}x + B,$$

on obtient :

$$Ax(1-a)^2 - a^2B = bx + c, \qquad A = \frac{b}{(1-a)^2}, \qquad B = \frac{-c}{a^2}$$

la solution générale est :

$$y = \frac{b}{(1-a)^2}\, x\mathrm{L}x - \frac{c}{a^2} + \alpha x + \beta x^a + \gamma x^a \mathrm{L}x$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires.

94. On a :

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x - y, \qquad x - y = ce^t$$

$$\frac{dz}{dt} + z = 3(x-y) = 3ce^t, \qquad z = be^{-t} + \frac{3}{2}\, ce^t$$

$$\frac{dx}{dt} - 3x = y - x - z = -\frac{5}{2}\, ce^t - be^{-t}.$$

D'où le système de solutions :

$$x = ae^{3t} + \frac{5}{4}ce^{t} + \frac{b}{4}e^{-t}$$
$$y = ae^{3t} + \frac{c}{4}e^{t} + \frac{b}{4}e^{-t}$$
$$z = \frac{3}{2}ce^{t} + be^{-t}.$$

95. $$2y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + y'^3 - 3y'.$$

En prenant les dérivées, on a une équation différentielle entre x et y' :

$$2y' = y' + \frac{1}{y'} + \frac{dy'}{dx}\left(x - \frac{x}{y'^2} + 3y'^2 - 3\right)$$
$$(y'^2 - 1)y' = \frac{dy'}{dx}(y'^2 - 1)(x + 3y'^2).$$

La solution $y'^2 = 1$, $y' = \pm 1$, donne, en tenant compte de l'équation différentielle donnée, $y = \pm(x - 1)$. C'est une solution singulière, que l'on obtiendrait en exprimant que l'équation donnée en y' a une racine double. En supprimant cette solution, il reste :

$$y' = \frac{dy'}{dx}(x + 3y'^2)$$
$$\frac{dx}{dy'} - \frac{x}{y'} = 3y'.$$

Si x est considéré comme fonction de la variable y', cette équation est linéaire entre x et sa dérivée $\frac{dx}{dy'}$. L'équation sans second membre aurait la solution $x = cy'$. Si on pose $x = zy'$, l'équation complète devient

$$y'\frac{dz}{dy'} = 3y', \qquad z = 3y' + c$$
$$x = 3y'^2 + cy'.$$

De l'équation différentielle donnée on déduit :

$$y = 2y'^3 + \frac{c}{2}(1 + y'^2).$$

Si y' est un paramètre variable, ces deux équations représentent la courbe intégrale. Les dérivées de x et y s'annulent en même temps si $6y' + c = 0$. Posons :

$$y' + \frac{c}{6} = t, \quad x = 3t^2 - \frac{c^2}{12}, \quad y = 2t^3 - \frac{1}{2}ct^2 + \frac{c}{2} + \left(\frac{c}{6}\right)^3,$$

Si on déplace l'origine des coordonnées en posant :

$$x = X - \frac{c^2}{12}, \quad y = Y + \frac{c}{2} + \frac{c^3}{6^3},$$

on a la courbe

$$X = 3t^2, \quad Y = 2t^3 - \frac{1}{2}ct^2 = -\frac{c}{6}X \pm \frac{2}{3}X\sqrt{\frac{X}{3}},$$

la nouvelle origine est un point de rebroussement, la tangente à l'origine est $Y = -\frac{c}{6}X$.

En particulier, pour $y' = 0$, $t = \frac{c}{6}$, $x = 0$, $y = \frac{c}{2}$. Les conditions de l'énoncé donnent $c = -2$.

$$x = X - \frac{1}{3},$$

$$y = Y - \frac{28}{27},$$

$$Y = \frac{X}{3} \pm \frac{2}{3}X\sqrt{\frac{X}{3}},$$

$$Y' = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{X}{3}}.$$

La valeur

$$Y = \frac{X}{3} + \frac{2X}{3}\sqrt{\frac{X}{3}}$$

augmente avec X de $X = 0$ à $+\infty$. L'autre valeur augmente de $X = 0$ à $X = \frac{1}{3}$, puis diminue et devient négative à partir de $X = \frac{3}{4}$. Les branches sont paraboliques, oy est la direction asymptotique (*fig.* 4).

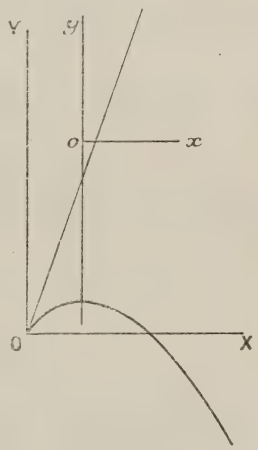


Fig. 4

96. On peut chercher si l'équation peut être vérifiée par un polynome. Comme y n'entre pas dans l'équation, on peut chercher

d'abord à déterminer $\frac{dy}{dx}$. Soit ax^n le terme de degré le plus élevé de $\frac{dy}{dx}$, dans le premier membre de l'équation, les termes de degré le plus élevé sont : $a(n-5)x^{n+3} + 9x^5$. Pour qu'ils puissent se réduire il faut, ou $n = 5$, ou $n = 2$.

Posons alors :

$$\frac{dy}{dx} = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

En substituant dans l'équation, et écrivant que les coefficients des puissances de x sont nuls, on a :

$$b + a = 0, \quad c = 0, \quad d = 3, \quad a + e = 0, \quad b + f = 0$$

et trois identités. Le coefficient a reste arbitraire, et l'on a la solution générale

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + a(x^5 - x^4 - x + 1)$$
$$y = x^3 + a\left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + x\right) + b.$$

Cette équation représente une courbe qui passe par l'origine si

$$b = 0, \quad y'' = 6x + a(5x^4 - 4x^3 - 1)$$

o est un point d'inflexion, si, pour $x = 0$, $y'' = -a = 0$. On a la solution $y = x^3$.

97. En posant $y = ax^2$, l'équation différentielle donnera :

$$(a^2 + a)x^4 - 2x(a + 1) = 0$$

elle est vérifiée si $a = -1$, $y = -x^2$ est une solution :

2° L'équation donnée est une équation de Riccati, qui doit se ramener à une équation linéaire, en posant : $y = -x^2 + \frac{1}{z}$. On aura, en effet :

$$\frac{dy}{dx} = -2x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{y(y - x^2) - 2x}{1 - x^3} = -2x + \frac{1 - 3zx^2}{z^2(1 - x^3)}$$
$$\frac{dz}{dx} - 3z\frac{x^2}{1 - x^3} + \frac{1}{1 - x^3} = 0.$$

L'équation, homogène en z et $\frac{dz}{dx}$, aurait la solution $\frac{1}{1-x^3}$. Si on pose, dans cette équation complète, $z = \frac{u}{1-x^3}$, elle donne

$$\frac{du}{dx} + 1 = 0, \qquad u = c - x, \qquad z = \frac{c-x}{1-x^3}$$

$$y = -x^2 + \frac{1-x^3}{c-x} = \frac{1-cx^2}{c-x};$$

3° Si, dans l'équation donnée, on pose $y = ax + b$, elle donne :

$$a(1-x^3) = -ax^3 + (a^2-b)x^2 + 2(ab-1)x + b^2$$

qui sera vérifiée, quelque soit x, si

$$b = a^2, \qquad a^3 = 1$$

Soit $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha^3 = 1$, on a les trois solutions $y_1 = \alpha x + \alpha^2$, $y_2 = \alpha^2 x + \alpha$, $y_3 = x + 1$.

En exprimant que le rapport anharmonique de quatre solutions est constant (propriété de l'équation de Riccati) on aura la solution générale y :

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = c\,\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} = c\,\frac{x(1-\alpha)+1-\alpha^2}{x(1-\alpha^2)+1-\alpha} = c\,\frac{x-\alpha^2}{-x\alpha^2+1}$$

$$y = \frac{\alpha^2 - x^2 + c(1-\alpha^2x^2)}{1-\alpha^2x + c(\alpha^2-x)} = \frac{1-c'x^2}{c'-x}$$

où $\qquad c' = \frac{1+c\alpha^2}{\alpha^2+c}$.

98. Si $y = \beta + z$, on a l'équation :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x+1)^2}{x^3}z^3 - \frac{x+1}{x}\left(1 - 3\beta\frac{x+1}{x^2}\right)z^2 + \left(\frac{x^2+3}{3x} - 2\beta\frac{x+1}{x} + 3\frac{(x+1)^2}{x^3}\beta^2\right)z +$$
$$+ \frac{(x+1)^2}{x^3}\beta^3 - \frac{x+1}{x}\beta^2 + \frac{x^2+3}{3x}\beta - \beta' + f(x).$$

On appelle équation de Bernouilli une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} + f(x)z^n + \varphi(x)z = 0.$$

Ici $n = 3$, et il faut : $\beta = \frac{x^2}{3(x+1)}$,

$$f(x) = \beta' - \frac{x^2+3}{3x}\beta + \frac{x+1}{x}\beta^2 - \frac{(x+1)^2}{x^3}\beta^3 =$$
$$= \frac{x}{3(x+1)^2} - \frac{x^3}{27(x+1)}.$$

On a alors :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(x+1)^2}{x^3}z^3 + \frac{z}{x}, \quad \frac{1}{z^3}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{xz^2} + \frac{(x+1)^2}{x^3}$$

et, en posant $\frac{1}{z^2} = u$, $\quad \frac{du}{dx} = -2\frac{u}{x} - 2\frac{(x+1)^2}{x^3}$.

Equation linéaire, dont la solution s'obtient en faisant la transformation $u = \frac{c}{x^2} = \frac{1}{z^2}$ où c serait une fonction de x. Ce qui revient à poser :

$$z = vx, \quad x\frac{dv}{dx} = (x+1)^2 v^3$$
$$\frac{dv}{v^3} = \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)dx$$
$$-\frac{1}{2v^2} = \frac{x^2}{2} + 2x + \mathrm{L}x - \frac{c}{2}$$
$$z = \frac{x}{\sqrt{c - x^2 - 4x - 2\mathrm{L}x}}.$$

99. Si on pose $y = \frac{z}{x}$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x^2}$ on aura :

$$x\frac{dz}{dx} - z + z^2 = a(z-1)$$
$$x\frac{dz}{dx} = (z-1)(a-z), \quad \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-a}\right)\frac{dz}{a-1}$$
$$(a-1)\mathrm{L}x = \mathrm{L}\frac{z-1}{z-a} - \mathrm{L}c, \quad cx^{a-1} = \frac{xy-1}{xy-a}$$
$$xy = \frac{1 - acx^{a-1}}{1 - cx^{a-1}}.$$

Si $a = 1$, l'équation qui détermine z devient

$$x\frac{dz}{dx} = -(z-1)^2, \quad \frac{dx}{x} = \frac{-dz}{(z-1)^2}$$
$$\mathrm{L}x = \frac{1}{z-1} - c, \quad xy = 1 + \frac{1}{\mathrm{L}x + c}.$$

100. En remplaçant y par x^n, l'équation différentielle donne :

$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 x^n + n\left(n+\frac{1}{2}\right) x^{n-1} = 0, \quad n = -\frac{1}{2}$$

on a la solution $y = \frac{c}{\sqrt{x}}$. Si on pose $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$, l'équation donnée devient :

$$x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{z''}{z'} = \frac{2x-1}{2x(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2c}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}, \quad z = c \text{ arc sin } (2x-1) + c'$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x}} \text{ arc sin } (2x-1) + \frac{c'}{\sqrt{x}}$$

cette formule suppose $0 < x < 1$. Si x n'est pas compris entre 0 et 1, la solution peut se mettre sous la forme

$$\frac{dz}{dx} = \frac{c}{\sqrt{x(x-1)}} = \frac{2c}{\sqrt{(2x-1)^2-1}}, \quad z = c\mathrm{L}\left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right)$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x}} \mathrm{L}\left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right) + \frac{c'}{\sqrt{x}}.$$

101. En posant

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta,$$

l'équation différentielle devient :

$$(aX + bY + a\alpha + b\beta + c)dX + (aY - bX + a\beta - b\alpha + c')dY = 0,$$

on peut choisir α et β de façon qu'elle soit homogène, si

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \qquad a\beta - b\alpha + c' = 0$$

$$\alpha = \frac{bc' - ac}{a^2 + b^2}, \qquad \beta = -\frac{ac' + bc}{a^2 + b^2}$$

$$a(XdX + YdY) = b(XdY - YdX)$$

$$\frac{ad(X^2 + Y^2)}{2(X^2 + Y^2)} = b\frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

$$\mathrm{L}(X^2 + Y^2) = 2\frac{b}{a} \text{ arc tg } \frac{Y}{X} + c.$$

Par un déplacement déterminé de l'origine, on ramène les courbes intégrales à avoir, en coordonnées polaires, l'équation

$$L\rho = \frac{b}{a}\omega + c.$$

Une rotation de l'axe polaire OX, autour de l'origine, ramène cette équation à la forme

$$\rho = e^{\frac{b}{a}\omega}.$$

spirales logarithmiques que l'on peut faire tourner arbitrairement autour du pôle.

102. Si on pose

$$y = \sum a_n x^n,$$

et si on écrit que l'équation est vérifiée, le coefficient de x^n donne la relation :

$$(n+1)(p+q-n)a_{n+1} = (p-n)a_n.$$

Le degré le plus élevé doit être $n = p$, car alors $a_{n+1} = 0$, on aura :

$$p(q+1)a_p = 1 \,.\, a_{p-1}, \qquad (p-1)(q+2)a_{p-1} = 2a_{p-2}$$
$$2(p+q-1)a_2 = (p-1)a_1, \qquad (p+q)a_1 = pa_0.$$

Il suffit que p soit entier pour qu'il y ait une solution ainsi déterminée

$$a_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,(p+q)(p+q-1)\ldots(p+q-n+1)}\,a_0.$$

Si on pose $y = e^x z$, l'équation donnée devient

$$x\frac{d^2z}{dx^2} - (p+q-x)\frac{dz}{dx} - qz = 0.$$

Si on pose $x = -t$,

$$\frac{d}{dx} = -\frac{dz}{dt}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

on a l'équation

$$t\frac{d^2z}{dt^2} - (t+p+q)\frac{dz}{dt} + qz = 0$$

de même forme que l'équation donnée, qui sera vérifiée par un polynome en t, ou en x, de degré q, si q est entier.

Si p et q sont entiers, la solution générale sera de la forme

$$y = cP(x) + c'e^{r}Q(x).$$

103. En retranchant les équations, pour éliminer $\frac{d^2y}{dx^2}$, on a :

$$\frac{4x^2 + 3 - \sqrt{x}}{2x}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2\sqrt{1+x}}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} = 0, \qquad Ly + \sqrt{1+x} = Lc$$

$$y = ce^{-\sqrt{1+x}}.$$

Il est facile de vérifier que c'est une solution commune. Si on pose

$$y = ze^{-\sqrt{1+x}},$$

les équations deviennent : $\begin{cases} z'' = z'\left(2x + \frac{1}{x}\right) \\ z'' = \frac{z'}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \end{cases}$ qui donnent :

$$z' = 2cxe^{x^2}, \qquad z = ce^{x^2} + c'$$

et

$$z' = \frac{c}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}, \qquad z = ce^{\sqrt{x}} + c'.$$

104. Si on pose $y = \sum a_n x^n$, dans (E_a), le coefficient de x^n sera :

$$-(n+1)(n+a+1)a_{n+1} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2} + a\right)a_n = 0.$$

On aura l'intégrale

$$y_0 = \varphi(a, x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

où

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2a+1)}{4(n+1)(n+a+1)}a_n$$

$$a_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{(2a+1)(2a+3)\ldots(2a+2n-1)}{(2a+2)(2a+4)\ldots(2a+2n)}.$$

La série y_0 est convergente, si $|x| < 1$.

En remplaçant n par $n - a$, ou, en posant

$$y = \sum_0^\infty b_n x^{n-a},$$

on aura

$$b_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n-2a+1)}{4(n+1)(n-a+1)} b_n, \qquad b_0 = 1$$

$$b_n = \frac{1.2\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \cdot \frac{(1-2a)(3-2a)\ldots(2n-2a-1)}{(2-2a)(4-2a)\ldots(2n-2a)}$$

ou

$$y_1 = x^{-a}\varphi(-a, x)$$

2° $$\varphi(o, x) = \sum_0^\infty \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 x^n.$$

Pour avoir la limite φ' de

$$\frac{\varphi(a, x) - \varphi(o, x)}{a},$$

pour $a = o$, on peut développer a_n suivant les puissances de a

$$a_n = \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \left[1 + 2a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdots - \frac{1}{2n}\right) + \ldots\right]$$

$$\varphi' = \sum_0^\infty 2\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdots - \frac{1}{2n}\right) x^n$$

$$\frac{y_0 - y_1}{a} = x^{-a}\frac{\varphi(a, x) - \varphi(-a, x)}{a} + \frac{1 - x^{-a}}{a}\varphi(a, x)$$

$$\frac{\varphi(a, x) - \varphi(-a, x)}{a} = \frac{\varphi(a, x) - \varphi(o, x)}{a} + \frac{\varphi(-a, x) - \varphi(o, x)}{-a}$$

a pour limite $2\varphi'$. La limite de $\frac{1 - x^{-a}}{a}$, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, s'obtient en prenant le rapport des dérivées, par rapport à a, $-x^{-a}\mathrm{L}\frac{1}{x}$, ou $\mathrm{L}x$, pour $a = o$. La limite de $\frac{y_0 - y_1}{a}$ est

$$\varphi(o, x)\mathrm{L}x + 2\varphi' =$$

$$= \sum_0^\infty \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 x^n \left[\mathrm{L}x + 4\left(1 - \frac{1}{2} + \ldots - \frac{1}{2n}\right)\right]$$

3° Si on pose

$$x = \frac{1}{t}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}t^2, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}t^4 + 2\frac{dy}{dt}t^3$$

l'équation E_a devient :

$$t^2(1-t)\frac{d^2y}{dt^2} - t(a+t-at)\frac{dy}{dt} + \frac{2a+1}{4}y = 0.$$

Et, en posant :

$$y = T\sqrt{t}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dT}{dt}\sqrt{t} + \frac{T}{2\sqrt{t}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2T}{dt^2}\sqrt{t} + \frac{dT}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{T}{4t\sqrt{t}},$$

on a, après avoir divisé par $t\sqrt{t}$:

$$t(1-t)\frac{d^2T}{dt^2} + \big((a-2)t - a + 1\big)\frac{dT}{dt} + \frac{2a-1}{4}T = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation E_{-a}, elle a donc les solutions

$$T_0 = \varphi(-a, t), \qquad T_1 = t^a\varphi(a, t), \qquad |t| < 1.$$

Il en résulte, pour l'équation E_a, les solutions

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(-a, \frac{1}{x}\right), \qquad y = \frac{1}{x^a\sqrt{x}}\varphi\left(a, \frac{1}{x}\right), \qquad |x| > 1.$$

4° Pour $a = 0$, on a l'équation

$$(E_0) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{4} = 0$$

sa solution générale est

$$y = c\varphi(0, x) + c'[\varphi(0, x)Lx + 2\varphi'].$$

y est la limite de $\frac{y_0 - y_1}{a}$ pour $a = 0$, φ et φ' sont deux séries convergentes si $|x| < 1$.

Si $|x| > 1$, on peut appliquer les mêmes principes à l'équation qui donne T, lorsque $a = 0$, elle aura les solutions :

$$\varphi(0, t) \qquad \text{et} \qquad 2\varphi'(t) + \varphi(0, t)Lt.$$

L'équation E_0 a ainsi les solutions

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(0, \frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\left[2\varphi'\left(\frac{1}{x}\right) - \varphi\left(0, \frac{1}{x}\right)\mathrm{L}x\right]$$

ces séries sont convergentes si $|x| > 1$.

Pour étudier les solutions dans le voisinage de $x = 1$, posons

$$x = 1 - t, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

l'équation E_0 devient

$$t(t-1)\frac{d^2y}{dt^2} + (2t-1)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{4} = 0$$

c'est l'équation E_0 où $t = x$; elle a les solutions :

$$\varphi(0, t) \qquad \text{et} \qquad 2\varphi'(t) + \varphi(0, t)\mathrm{L}t$$

ou

$$\varphi(0, 1-x) \qquad \text{et} \qquad 2\varphi'(1-x) + \varphi(0, 1-x)\mathrm{L}(1-x).$$

105. En posant $y = tx$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t = \frac{t^3}{2} + \frac{3t}{2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{t^3 + t} = 2\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt$$

$$\mathrm{L}x = 2\mathrm{L}t - \mathrm{L}(1+t^2) + \mathrm{L}c$$

$$\frac{x}{c} = \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}, \qquad y^2 = \frac{x^3}{c-x}.$$

106.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{dy}{dx} - 3\right) = 27(1+t^2)^2(1+3t^2)^2(4t^2+3t^4)$$

$$9y^4 + 12y^2 = 27t^2(1+t^2)^2[4 + 27t^2(1+t^2)^2]$$

expressions identiques, l'équation différentielle est vérifiée. On a :

$$\frac{dy}{dt} = 3(1+3t^2) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}3(1+t^2)(1+3t^2)$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad x = \operatorname{arc\,tg} t - c, \qquad t = \operatorname{tg}(x+c)$$

$$y = 3\operatorname{tg}(x+c)(1+\operatorname{tg}^2(x+c)) = \frac{3\sin(x+c)}{\cos^3(x+c)}.$$

107. On a :

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{dy_1}{dx}\frac{1}{y_1^2}, \qquad \frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{1}{y_1^2} + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2\frac{2}{y_1^3}.$$

Il doit donc exister une solution $y = y_1$, vérifiant les deux équations :

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -p\frac{dy}{dx} + qy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + qy$$

ou :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = qy^2, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = p\frac{dy}{dx}.$$

On en déduit :

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{q},$$

où $\sqrt{q}$ peut représenter les deux valeurs du radical.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\sqrt{q} + \frac{y}{2\sqrt{q}}\frac{dq}{dx} = y\left(q + \frac{1}{2\sqrt{q}}\frac{dq}{dx}\right)$$

d'où la relation :

$$\frac{dq}{dx} = 2pq.$$

Si cette relation est vérifiée, on a les deux solutions

$$y = e^{\pm\int\sqrt{q}\,dx}.$$

Supposons $p = \frac{1}{x}$,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{2q}{x} \qquad \text{donne} \qquad q = 4ax^2.$$

L'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4ax^2y$$

a la solution générale

$$y = ce^{x^2\sqrt{a}} + c'e^{-x^2\sqrt{a}}.$$

Si a est négatif, la solution de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 4a^2x^2y$$

peut se mettre sous la forme

$$y = c\cos(ax^2) + c'\sin(ax^2).$$

108. Si on pose $y = x^n$, le premier membre de l'équation s'annule, lorsque

$$n(n-1) - 2n - 4 = 0$$
$$n = 4 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Posons

$$y = ux^4 + vx^{-1} \qquad \text{et} \qquad u'x^4 + v'x^{-1} = 0$$

on aura

$$y' = 4ux^3 - vx^{-2}$$
$$y'' = 12ux^2 + 2vx^{-3} + 4u'x^3 - v'x^{-2}.$$

L'équation donnée devient :

$$4u'x^5 - v' = x \sin x + (a + bx^2) \cos x$$
$$u'x^5 = -v' = \frac{x \sin x + (a + bx^2) \cos x}{5}$$

$$v = -\frac{1}{5} \int [x \sin x + (a + bx^2) \cos x] dx =$$
$$= -\frac{a}{5} \sin x - \frac{b}{5} x^2 \sin x + \frac{2b-1}{5} (\sin x - x \cos x) + c$$
$$u = \frac{1}{5} \int [x \sin x + (a + bx^2) \cos x] \frac{dx}{x^5}.$$

Si on développe suivant les puissances de x, on a :

$$5u = \int \left(\frac{a}{x^5} + \frac{1 + b - \frac{a}{2}}{x^3} + \frac{a - 12b - 4}{24x} + \ldots \right) dx.$$

Le seul terme qui donne une intégrale non uniforme est

$$\frac{a - 12b - 4}{24} \mathrm{L}x.$$

Il faut donc que l'on ait :

$$a = 4 + 12b.$$

Dans ce cas, on a :

$$u = \frac{1}{5} \int \frac{x \sin x + 4 \cos x + b(x^2 + 12) \cos x}{x^5} dx =$$
$$= -\frac{\cos x}{5x^4} + b \frac{x \sin x - 3 \cos x}{5x^4} + c'$$
$$y = c'x^4 + cx^{-1} - \frac{\sin x}{x} - b\left(\cos x + 2 \frac{\sin x}{x}\right).$$

109. Si on pose $y = x^2 + z$, on a :

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\frac{2x}{1+x^2} = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{c}{1+x^2}$$

$$y = x^2 + c \operatorname{arc\,tg} x + c'$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{c}{1+x^2}.$$

Pour $x = -1$, on doit avoir $c = 4$, $c' = \pi - 1$

$$y = \pi - 1 + x^2 + 4 \operatorname{arc\,tg} x = \pi - 1 + x^2 + 4\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}.$$

Les points singuliers sont $x = \pm i$. Si arc tg x est la valeur de l'intégrale sur un chemin déterminé, en faisant d'abord le tour du point $x = i$ on ajoute à l'intégrale la valeur 4π ; et en faisant le tour du point $-i$, la valeur -4π, car la fonction

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{4}{(x+i)(x-i)}$$

a pour résidu, $\frac{2}{i}$ pour $x = i$, et $\frac{-2}{i}$ pour $x = -i$. On peut ainsi ajouter à y un multiple de 4π.

110. En ajoutant les 3 équations, on a :

$$x + y + z = \sqrt{3} \sin t.$$

En retranchant les deux dernières :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + (z - y)\sqrt{3} = \sqrt{3}\cos t - \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{3} + z - y = \cos t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\sqrt{3} = \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} - \sin t = -x\sqrt{3}.$$

L'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

a pour solution :

$$x = a\cos t + b\sin t$$

$$y - z = \frac{dx}{dt}\sqrt{3} - \cos t = (b\sqrt{3} - 1)\cos t - a\sqrt{3}\sin t$$

$$y + z = \sqrt{3}\sin t - x = -a\cos t - (b - \sqrt{3})\sin t.$$

On peut aussi remarquer que y et z ont la même forme que x, à cause de la symétrie des équations. En laissant les six coefficients arbitraires, et en exprimant que les équations différentielles sont vérifiées, on peut mettre la solution sous la forme symétrique :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a\sqrt{3}\right)\sin t + (b - c)\cos t \\ y &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - b\sqrt{3}\right)\sin t + (c - a)\cos t \\ z &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - c\sqrt{3}\right)\sin t + (a - b)\cos t \end{aligned}\right.$$

où $a + b + c = 0$.

111. Si on prend la dérivée de l'équation :

$$x + yy' = \frac{3ay'}{1 + y'^2},$$

on a

$$1 + y'^2 + \frac{dy'}{dx}\left(y + 3a\frac{y'^2 - 1}{(1 + y'^2)^2}\right) = 0$$

en remplaçant $\frac{dy'}{dx}$ par $y'\frac{dy'}{dy}$, et en considérant y comme une fonction de y', on a l'équation linéaire :

$$\frac{dy}{dy'} + \frac{yy'}{1 + y'^2} = 3ay'\frac{1 - y'^2}{(1 + y'^2)^3}$$

qu'on peut intégrer en posant $y = \frac{z}{\sqrt{1 + y'^2}}$

$$\frac{dz}{dy'} = 3a\left(\frac{2y'}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$z = \frac{-2a}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3a}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} + c$$

$$y = \frac{3a}{1 + y'^2} - \frac{2a}{(1 + y'^2)^2} + \frac{c}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

On en déduit :

$$x = \frac{2ay'}{(1 + y'^2)^2} - \frac{cy'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

La courbe intégrale est représentée par les deux équations

$$x = \frac{2at}{(1+t^2)^2} - \frac{ct}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad y = a\frac{1+3t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}$$

où $t = \frac{dy}{dx}$ est un paramètre variable.

2° Si $t = \infty$, $x = -c$, $y = 0$. La tangente parallèle à oy, qui correspond à $t = \infty$, est $x = -c$, elle coïncide avec oy si $c = 0$. On a alors la courbe :

$$x = \frac{2at}{(1+t^2)^2}, \qquad y = a\frac{1+3t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2a\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}, \qquad \frac{dy}{dt} = t\frac{dx}{dt}.$$

Si on change t en $-t$, on a deux points symétriques par rapport à oy. Si t varie de 0 à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x augmente de 0 à $\frac{3}{8}a\sqrt{3}$, y augmente de a à $\frac{9}{8}a$.

Si t varie de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ à ∞, x et y diminuent jusqu'à zéro. La valeur $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ correspond à un point de rebroussement (*fig.* 5).

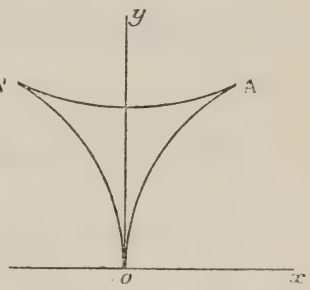


Fig. 5

3° Le triangle formé par les arcs oA, oA' et la corde AA' engendre, en tournant autour de oy, un volume égal à

$$V_1 = \int_0^{\frac{9}{8}a} \pi x^2 dy = 8\pi a^3 \int_\infty^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^7} t^3 dt.$$

L'aire comprise entre l'arc ABA' et la corde AA' engendre un volume :

$$V_2 = \int_a^{\frac{9}{8}a} \pi x^2 dy = 8\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^7} t^3 dt.$$

L'aire comprise à l'intérieur de la courbe $oABA'o$ engendre un volume égal à la différence :

$$V = V_1 - V_2 = 8\pi a^3 \int_0^\infty \frac{3t^2-1}{(1+t^2)^7} t^3 dt.$$

Si on pose $t = \operatorname{cotg} \alpha$

$$V = 8\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos^3 \alpha \sin^7 \alpha d\alpha$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\alpha)(1 - \cos 2\alpha)^2 \sin^2 2\alpha d\alpha$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 4 \cos^2 2\alpha + 2 \cos^3 2\alpha +$$
$$+ 3 \cos^4 2\alpha - 2 \cos^5 2\alpha) \sin 2\alpha d\alpha$$

$$= \frac{\pi a^3}{8} \int_{-1}^{1} (1 - 4\theta^2 + 2\theta^3 + 3\theta^4 - 2\theta^5 d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3}{8} \left(\theta - \frac{4}{3}\theta^3 + \frac{\theta^4}{2} + \frac{3}{5}\theta^5 - \frac{\theta^6}{3}\right)_{-1}^{1} = \frac{\pi a^3}{15}.$$

112. On a :

$$\frac{du}{dx} = \int_0^\infty e^{-z} \sqrt{z} \cos (zx) dz = \int_0^\infty e^{-z} \frac{\sqrt{z}}{x} d \sin (zx) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{z}}{x} e^{-z} \sin zx\right)_{z=0}^{\infty} - \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{x}\left(-\sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) \sin (zx) dz$$

et comme $\sqrt{z}\, e^{-z}$ est nul pour $z = 0$, et $z = \infty$.

$$x \frac{du}{dx} + \frac{u}{2} = \int_0^\infty e^{-z} \sqrt{z} \sin (zx) dx.$$

De même :

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^\infty - e^{-z} \sqrt{z} \sin (zx) dz = \int_0^\infty e^{-z} \frac{\sqrt{z}}{x} d \cos (zx) =$$

$$= - \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{x}\left(-\sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right) \cos (zx) dz$$

$$x \frac{dv}{dx} + \frac{v}{2} = \int_0^\infty e^{-z} \sqrt{z} \cos (zx) dz$$

on a ainsi les deux équations :

$$x \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{u}{2} = 0.$$

$$x \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx} + \frac{v}{2} = 0$$

et

$$x\frac{d(u+av)}{dx}+\frac{d(v-au)}{dx}+\frac{u+av}{2}=0$$

on peut choisir la constante a de façon que $\frac{u+av}{-au+v}$ reste constant, il faut $a^2=-1$, $a=\pm i$. On a ainsi :

$$(x-i)\frac{d(u+vi)}{dx}+\frac{u+vi}{2}=0$$

$$2\frac{d(u+vi)}{u+vi}+\frac{dx}{x-i}=0$$

$$2\mathrm{L}(u+vi)+\mathrm{L}(x-i)=\mathrm{L}c$$

$$(u+vi)^2(x-i)=a+bi$$

en exprimant que les parties réelles et les coefficients de i sont égaux, on a :

$$(u^2-v^2)x+2uv=a$$

$$-u^2+v^2+2uvx=b$$

Mais, pour $x=0$, on a :

$$u=0,\qquad v=\int_0^\infty\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\,dz$$

et en posant $z=t^2$,

$$v=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

on a ainsi $a=0$, $\pi=b$

$$(u^2-v^2)x+2uv=0$$

$$-u^2+v^2+2uvx=\pi$$

$$2uv=\frac{\pi x}{1+x^2},\qquad v^2-u^2=\frac{\pi}{1+x^2}$$

$$u^4+\frac{\pi}{1+x^2}u^2-\frac{\pi^2x^2}{4(1+x^2)^2}=0$$

$$u^2=\frac{-\pi}{2(1+x^2)}+\frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$u=\sqrt{\pi\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2(1+x^2)}},\qquad v=\sqrt{\pi\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}}.$$

113. y et z sont des fonctions de x; on a :

$$y' = zy$$
$$y'' = z'y + y'z = -Ay' - By$$
$$(z' + B)y = -(z + A)y' = -(z + A)yz.$$

En divisant par y, qui n'est pas identiquement nul :

$$z' + z^2 + Az + B = 0.$$

2° On a :

$$u = \frac{y_2}{y_1}, \qquad u' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2}$$
$$Lu' = L(y_2'y_1 - y_1'y_2) - 2Ly_1$$
$$\frac{u''}{u'} = \frac{y_2''y_1 - y''_1y_2}{y_2'y_1 - y_1'y_2} - 2\frac{y'_1}{y_1}.$$

Mais

$$y_1'' = -Ay_1' - By_1, \qquad y_2'' = -Ay_2' - By_2$$
$$v = \frac{u''}{u'} = -A - 2\frac{y_1'}{y_1} = -A - 2z_1.$$

En exprimant que $z_1 = -\frac{v + A}{2}$ vérifie l'équation de Riccati précédente, on a :

$$v' - \frac{v^2}{2} + A' + \frac{A^2}{2} - 2B = 0$$

c'est une équation de Riccati, puisque leur forme générale est

$$y' + Xy^2 + X_1y + X_2 = 0, \qquad \text{où} \qquad X, X_1, X_2$$

sont des fonctions de x.

3° Si $u = \frac{y_2}{y_1}$ est une fonction donnée, on connaîtra la fonction $v = \frac{u''}{u'}$, et on devra avoir la condition

$$2B - A' - \frac{A^2}{2} = v' - \frac{v^2}{2}.$$

Dans les quatre cas de l'énoncé, on aura :

(α) $u = ax + b, \qquad v = \frac{u''}{u'} = 0, \qquad 2B - A' - \frac{A^2}{2} = 0$

(β) $u = \operatorname{tg}(ax), \qquad v = 2a \operatorname{tg} ax, \qquad 2B - A' - \frac{A^2}{2} = 2a^2$

$$(\gamma)\quad u = \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} ax} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}, \quad v = -2au, \quad 2B - A' - \frac{A^2}{2} = -2a^2$$

$$(\delta)\quad u = Lx, \qquad v = -\frac{1}{x}, \qquad 2B - A' - \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2x^2}.$$

L'équation (1) prend alors la forme

$$y'' + Ay' + y\left(\frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4} + D\right) = 0 \quad \text{où} \quad D = 0, \quad \pm a^2, \quad \frac{1}{4x^2}$$

et si

$$\frac{y'}{y} = z, \qquad z' + z^2 + Az + \frac{A'}{2} + \frac{A^2}{4} + D = 0.$$

Soit

$$z + \frac{A}{2} = \theta,$$

on aura

$$\theta' + \theta^2 + D = 0.$$

Dans les quatre cas considérés, on aura

$$(\alpha)\qquad D = 0, \qquad \frac{d\theta}{\theta^2} + dx = 0, \qquad \frac{1}{\theta} = x + c$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{A}{2} + \frac{1}{x + c}, \qquad Ly = L(x + c) - \int \frac{A}{2}\, dx + c'$$

$$(\beta)\quad D = a^2, \qquad \frac{d\theta}{\theta^2 + a^2} + dx = 0, \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{\theta}{a} = c - ax$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{A}{2} + a \operatorname{tg}(c - ax), \quad Ly = L\cos(c - ax) - \int \frac{A}{2}\, dx + c'$$

$$(\gamma)\quad D = -a^2, \qquad \frac{d\theta}{\theta^2 - a^2} + dx = 0, \qquad L\frac{\theta + a}{\theta - a} = 2ax + Lc$$

$$\frac{y'}{y} + \frac{A}{2} = a\,\frac{1 + ce^{2ax}}{-1 + ce^{2ax}} = a\left(\frac{e^{-2ax}}{c - e^{-2ax}} + \frac{ce^{2ax}}{-1 + ce^{2ax}}\right)$$

$$Ly = -\int \frac{A}{2}\, dx + \frac{1}{2} L(c - e^{-2ax}) + \frac{1}{2} L(-1 + ce^{2ax}) + c' =$$

$$= -\int \frac{A}{2}\, dx + L(ce^{ax} - e^{-ax}) + c'$$

$$(\delta)\qquad D = \frac{1}{4x^2}, \qquad \theta' + \theta^2 + \frac{1}{4x^2} = 0.$$

En posant :

$$\theta = \frac{1}{2x} + \frac{1}{t}, \quad \text{on a} \quad t' - 1 - \frac{t}{x} = 0.$$

Soit

$$t = \mathrm{T}x, \qquad \mathrm{T}'x = 1, \qquad 0 = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(c + \mathrm{L}x)}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\mathrm{A}}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(c + \mathrm{L}x)}, \quad \mathrm{L}y = \frac{1}{2}\mathrm{L}x + \mathrm{L}(c + \mathrm{L}x) - \int \frac{\mathrm{A}}{2} dx + c'.$$

Si A est constant, dans les trois premiers cas, on a :

$$(\alpha) \qquad y = (c_1 x + c_2) e^{-\frac{\mathrm{A}x}{2}}$$

$$(\beta) \qquad y = (c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) e^{-\frac{\mathrm{A}x}{2}}$$

$$(\gamma) \qquad y = c_1 e^{\left(a - \frac{\mathrm{A}}{2}\right)x} + c_2 e^{-\left(a + \frac{\mathrm{A}}{2}\right)x}$$

Dans le quatrième cas (δ), si $\mathrm{A} = \frac{2m}{x}$, on a

$$y = x^{2-m}(c_1 + c_2 \mathrm{L}x).$$

114. Si on différencie l'équation donnée, on a :

$$y' - \frac{1}{y'} = \frac{dy'}{dx}\left(x - \frac{x}{y'^2} + y'^2 - 1\right).$$

La solution

$$y'^2 = 1, \qquad y' = \pm 1$$

donne la solution singulière

$$y = \frac{1}{2} \pm \left(x - \frac{1}{3}\right)$$

formée des deux droites

$$y = \frac{1}{6} + x, \qquad y = \frac{5}{6} - x.$$

En supprimant cette solution, il reste :

$$\frac{1}{y'} = \frac{dy'}{dx}\left(\frac{x}{y'^2} + 1\right).$$

En considérant x comme fonction de la variable y', on a :

$$\frac{dx}{dy'} = \frac{x}{y'} + y',$$

équation linéaire, dont la solution générale est

$$x = 2cy' + y'^2.$$

De l'équation donnée on déduit alors :

$$y = c(1 + y'^2) + \frac{2}{3}y'^3 + \frac{1}{2}.$$

Ces équations représentent les courbes intégrales en fonction du paramètre y'. La courbe passe par l'origine si l'on a, en même temps :

$$y'(2c + y') = 0, \qquad c(1 + y'^2) + \frac{2}{3}y'^3 + \frac{1}{2} = 0$$

si $y' = 0$,

$$c = -\frac{1}{2}$$

si $y' = -2c$,

$$4c^3 - 3c - \frac{3}{2} = 0.$$

Cette équation n'a qu'une racine réelle, que l'on peut calculer par la formule de Cardan

$$c = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{12+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\right).$$

Pour $c = -\frac{1}{2}$, on a la courbe :

$$x = t^2 - t, \qquad y = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2}, \qquad \frac{dy}{dx} = t$$

qui est tangente à ox en o, et coupe oy au point $t = 1$, $x = 0$, $y = \frac{1}{6}$; elle a un point de rebroussement B (*fig.* 6)

$$t = \frac{1}{2}, \qquad x = -\frac{1}{4}, \qquad y = -\frac{1}{24}$$

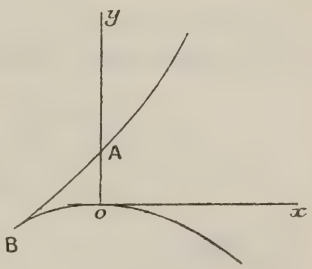


Fig. 6

sur cette courbe, on a

$$dx = (2t - 1)dt, \qquad dy = (2t - 1)t\,dt$$

$$ds = (2t - 1)\sqrt{1 + t^2}\,dt.$$

La longueur de l'arc OBA est :

$$s = \int_0^1 (2t - 1)\sqrt{1 + t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, d(t^2) - \int_0^1 \frac{1 + 2t^2}{2\sqrt{1 + t^2}} dt - \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{1 + t^2}}$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

115. Si on exprime y en fonction de $t = \varphi(x)$, on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\varphi'(x), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\varphi'^2(x) + \frac{dy}{dt}\varphi''(x).$$

L'équation

$$y''f^2 - \mathrm{X}y' + y = 0$$

devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} f^2\varphi'^2 + \frac{dy}{dt}(f^2\varphi'' - \mathrm{X}\varphi') + y = 0.$$

Pour qu'elle se réduise à

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2 y = 0,$$

il faut que l'on ait :

$$f^2\varphi'' = \mathrm{X}\varphi', \qquad f^2\varphi'^2 = \frac{1}{\mathrm{K}^2}$$

ou, puisque le signe de K est arbitraire :

$$\varphi' = \frac{1}{\mathrm{K}f}, \quad \mathrm{X} = f^2\frac{\varphi''}{\varphi'} = -ff'$$

$$t = \varphi = \frac{1}{\mathrm{K}}\int \frac{dx}{f(x)}.$$

L'équation

$$f^2y'' + ff'y' + y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{K}^2 y = 0$$

a pour intégrale

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

$$2^\circ \quad 2y'y''f^2 - 2y'^2X + 2yy' = \frac{d}{dx}(y^2 + y'^2f^2) - 2y'^2(X + ff')$$

c'est une dérivée exacte, quelle que soit la fonction y de x, si l'on a $X = -ff'$, valeur déjà trouvée.

Dans ce cas, l'équation (1) devient

$$f^2\frac{d(y'^2)}{dx} + y'^2\frac{d(f^2)}{dx} + 2yy' = 0.$$

$$f^2y'^2 + y^2 = c^2,$$

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{dy}{\pm\sqrt{c^2 - y^2}}$$

$$\text{arc sin}\,\frac{y}{c} = \int\frac{dx}{f(x)} + c'$$

$$y = c\,\sin\left[c' + \int\frac{dx}{f(x)}\right]$$

c'est la solution déjà obtenue.

116. On a :

$$y = (x - a)\int_b^x f(t)P(t)dt + (x - b)\int_a^x f(t)Q(t)dt$$

$$y' = \int_b^x f(t)P(t)dt + (x - a)f(x)P(x) + \int_a^x f(t)Q(t)dt + \\ + (x - b)f(x)Q(x)$$

$$y'' = 2f(x)P(x) + (x - a)[f'(x)P(x) + f(x)P'(x)] + 2f(x)Q(x) + \\ + (x - b)[f'(x)Q(x) + f(x)Q'(x)]$$

et :

$$f(x) = f(x)[2P(x) + 2Q(x) + (x - a)P'(x) + (x - b)Q'(x)] + \\ + f'(x)[(x - a)P(x) + (x - b)Q(x)].$$

Pour que cette relation soit vérifiée, quelle que soit la fonction $f(x)$, il faut que l'on ait les deux relations

$$2P(x) + 2Q(x) + (x - a)P'(x) + (x - b)Q'(x) = 1$$
$$(x - a)P(x) + (x - b)Q(x) = 0.$$

La première équation devient : $P(x) + Q(x) = 1$.

$$\frac{P(x)}{x-b} = \frac{Q(x)}{a-x} = \frac{1}{a-b}$$

$$y = \frac{x-a}{a-b}\int_b^x f(t)(t-b)dt + \frac{x-b}{b-a}\int_a^x f(t)(t-a)dt$$

y est la solution de l'équation $y'' = f(x)$, qui s'annnle pour $x = a$, et pour $x = b$.

117. L'expression $RPdx + RQdy$ est une différentielle d'une fonction $F(x, y)$, si l'on a l'identité

$$\frac{\delta(RP)}{\delta y} = \frac{\delta(RQ)}{\delta x},$$

car ces deux expressions représentent

$$\frac{\delta^2 F}{\delta xy} \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 F}{\delta yx}.$$

Si R est une fonction de $u = y^2 - x$, et R' sa dérivée par rapport à u, cette condition devient :

$$R\frac{\delta P}{\delta y} + R'2yP = R\frac{\delta Q}{\delta x} - R'Q$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}}{2Py + Q} = \varphi(u).$$

Il faut que le second membre, comme le premier, se réduise à une fonction de $y^2 - x$, on a alors :

$$R = e^{\int \varphi(u)du}.$$

Si

$$P = (2y^2 - 2x - 1)e^x + (2y^2 - 3x)e^y$$
$$Q = 2ye^x + 2x(y^2 + y - x)e^y$$
$$\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} = -2ye^x - (2y + x)e^y$$
$$2Py + Q = 4y(y^2 - x)e^x + 2(2y^3 - 2xy + xy^2 - x^2)e^y =$$
$$= 4uye^x + 2u(2y + x)e^y$$
$$\frac{R'}{R} = \frac{\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}}{2Py + Q} = \frac{-1}{2u}$$
$$LR = \frac{-1}{2}Lu, \qquad R = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

On pourrait multiplier R par une constante, mais on peut la choisir égale à 1. En remplaçant x par $y^2 - u$, $dx = 2ydy - du$; on a :

$$R(Pdx + Qdy) = \frac{1}{\sqrt{u}}(2Py + Q)dy - \frac{P}{\sqrt{u}}du$$

$$= 2\sqrt{u}[2ye^{y^2-u} + (2y + y^2 - u)e^y]dy - [(2u - 1)e^{y^2-u} +$$

$$+ (3u - y^2)e^y]\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Pour intégrer cette différentielle exacte, on peut d'abord supposer y constant, $dy = 0$, l'intégrale est alors :

$$2e^{y^2-u}\sqrt{u} + 2e^y\left(y^2\sqrt{u} - u^{\frac{3}{2}}\right) + \varphi(y).$$

En formant la différentielle totale de cette fonction, et en comparant à la différentielle précédente, on trouve

$$\varphi'(y) = 0.$$

L'intégrale de l'équation différentielle $Pdx + Qdy = 0$ est donc :

$$e^{y^2-u}\sqrt{u} + e^y(y^2 - u)\sqrt{u} = c$$

$$(e^x + xe^y)\sqrt{y^2 - x} = c.$$

118. Si on pose $x = ty$, l'équation

$$(x^2 - y^4)dy - xydx = 0$$

devient

$$(t^2 - y^2)dy - t(tdy + ydt) = 0$$

$$ydy + tdt = 0, \qquad y^2 + \frac{x^2}{y^2} = a^2$$

on peut représenter cette courbe par les équations

$$y = a \sin\theta, \qquad x = a^2 \sin\theta\cos\theta$$

ou, si $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$,

$$y = \frac{2at}{1 + t^2}, \qquad x = 2a^2\frac{t(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}$$

ce sont des courbes unicursales du quatrième degré. On peut supposer $a > 0$, car la courbe reste la même si on change a en $-a$.

Elle est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Si on suppose x et y positifs, l'équation :

$$x = y\sqrt{a^2 - y^2}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^4}{xy} = \frac{a^2 - 2y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

montre que, lorsque y augmente de o à $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et a, x augmente de o à $\frac{a^2}{2}$, puis diminue jusqu'à o. Les parties symétriques donnent deux boucles fermées, les tangentes à l'origine sont les droites $x = \pm ay$. Si θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$ et π, le point (x, y) décrit, dans le sens positif, la boucle qui correspond à $y > 0$. Si θ continue à augmenter de π à 2π le point décrit la boucle symétrique dans le sens négatif.

Si a augmente de o à ∞, les boucles sont de plus en plus grandes, et ne se coupent qu'à l'origine.

2°

$$\frac{1}{(z^2+1)(z^2+z+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{i}{\sqrt{3}}}{z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1-\frac{i}{\sqrt{3}}}{z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+z+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}} L(2z+1+i\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}} L(2z+1-i\sqrt{3}) - \frac{1}{2} L(z^2+1).$$

Sur un contour déterminé $z_0 z$, l'intégrale est la variation de cette fonction. Sur un contour fermé décrit dans le sens positif, elle est égale au produit, par $2\pi i$, de la somme des résidus des pôles intérieurs au contour. Il y a 4 pôles

$$z = \pm i, \qquad z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Pour les pôles $z = \pm i$ le résidu est la valeur de

$$\frac{1}{2z(z^2+z+1)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2z^2} = \frac{-1}{2},$$

puisque

$$z^2 = -1.$$

Pour les pôles

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad z^2 + z + 1 = 0,$$

le résidu est la valeur de

$$\frac{1}{(z^2+1)(2z+1)} = \frac{1}{-2z^2-z} = \frac{1}{2+z} = \frac{2}{3 \pm i\sqrt{3}} = \frac{3 \mp i\sqrt{3}}{6}.$$

L'intégrale prise, dans le sens positif, autour de chacun des pôles

$$\pm i, \qquad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

aura les valeurs

$$-\pi i, \qquad \left(i+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi, \qquad \left(i-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi.$$

3° La courbe $y^4 + x^2 = a^2y^2$ passe par les pôles

$$z = \pm i, \qquad x = 0, \qquad y = \pm 1, \quad \text{si} \quad a = 1.$$

Elle passe par les pôles

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad x = -\frac{1}{2}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

si

$$a = \sqrt{\frac{13}{12}}.$$

Si on décrit la boucle supérieure, dans le sens positif, de o à o, lorsque $a < 1$, $I = 0$.

Si

$$1 < a < \sqrt{\frac{13}{12}},$$

on fait le tour du pôle $z = i$, on a $I = -\pi i$.

Si $a > \sqrt{\frac{13}{12}}$, les deux pôles $z = i$, et $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ sont intérieurs au contour, $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Si on décrit la boucle inférieure, dans le sens négatif, θ variant de π à 2π, lorsque

$$a < 1 \quad \text{on a} \quad I = 0, \quad \text{si} \quad 1 < a < \sqrt{\frac{13}{12}},$$

$$I = +\pi i, \quad \text{si} \quad a > \sqrt{\frac{13}{12}}, \qquad I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Si on décrit les deux boucles en faisant varier θ de 0 à 2π, on a

$$I = 0 \quad \text{si} \quad 0 < a < \sqrt{\frac{13}{12}}$$

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{si} \quad a > \sqrt{\frac{13}{12}}$$

a ne doit jamais être égal à 1 ou $\sqrt{\frac{13}{12}}$, car l'intégrale n'aurait plus de sens, comprenant des parties infinies.

119. Si on différentie l'équation $y = 2xy' + y'^2$, on a :

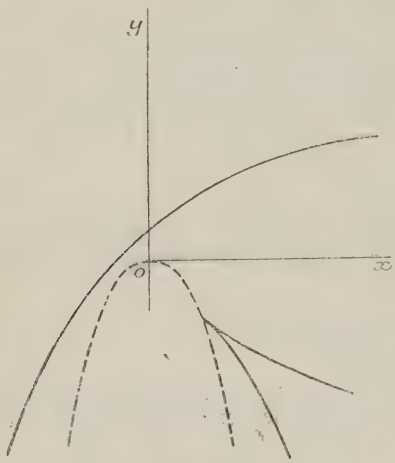


Fig. 7

$$y' + \frac{dy'}{dx}(2x + 2y') = 0$$

$$\frac{dx}{dy'} + 2\frac{x}{y'} + 2 = 0.$$

Si on considère x comme une fonction de y', c'est une équation linéaire, dont la solution générale est

$$x = \frac{c}{y'^2} - \frac{2}{3}y'$$

on en déduit :

$$y = 2xy' + y'^2 = \frac{2c}{y'} - \frac{y'^2}{3}.$$

Ces deux équations représentent la courbe intégrale en fonction du paramètre y'. En supposant $c > 0$ et faisant varier y' de

$$-\infty \quad \text{à} \quad -\sqrt[3]{3c}, \quad 0, \quad +\infty.$$

on a deux branches de courbes (*fig.* 7). On peut aussi éliminer y', on a :

$$y' = -x \pm \sqrt{y + x^2}$$

$$c = xy'^2 + \frac{2}{3}y'^3 = \frac{-1}{3}xy + \frac{2}{3}(y + x^2)y'$$

$$3c + xy = 2(y + x^2)\left(-x \pm \sqrt{y + x^2}\right)$$

$$(3c + 3xy + 2x^3)^2 = 4(y + x^2)^3$$

on aura une courbe passant par un point (x, y) donné, en prenant

une valeur de c vérifiant cette équation. Il y a deux courbes passant par un point donné ; mais, pour qu'elles soient réelles, il faut que

$$y + x^2 > 0$$

c'est aussi la condition pour que les valeurs de y', déduites de l'équation donnée, soient réelles. Le point doit être extérieur à la parabole $y + x^2 = 0$.

La solution singulière s'obtient en exprimant que y' a une racine double, mais pour $y = -x^2$, $y' = -2x$ l'équation n'est pas vérifiée. Cette parabole est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales. Il n'y a pas de solution singulière

120. L'équation

$$y'^2 + \frac{2x}{y}y' + 1 = 0$$

est homogène entre x et y, si on pose $y = tx$, on a :

$$y' = t + x\frac{dt}{dx} = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1} = -\frac{1}{t} \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-tdt}{1 + t^2 \pm \sqrt{1-t^2}}.$$

Posons :

$$\pm\sqrt{1-t^2} = \cos\theta, \qquad t = \sin\theta$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{2 - \cos^2\theta + \cos\theta} = \frac{-\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{2}{2-\cos\theta}\right)\frac{\sin\theta}{3}\, d\theta$$

$$3\,\mathrm{L}x = -\mathrm{L}(1+\cos\theta) - 2\,\mathrm{L}(2-\cos\theta) + \mathrm{L}c$$

$$x^3 = \frac{c}{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)^2}, \qquad y = x\sin\theta$$

ces deux équations représentent les courbes intégrales. On peut aussi éliminer θ.

$$c = x^3(4 - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta) = x^3 + 3xy^2 + (x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$(c - x^3 - 3xy^2)^2 = (x^2 - y^2)^3$$

$$c^2 - 2cx(x^2 + 3y^2) + y^2(y^2 + 3x^2)^2 = 0$$

Deuxième méthode. — L'équation donnée peut s'écrire

$$y + 2x\frac{y'}{1 + y'^2} = 0$$

si on la différentie, on a :

$$y' + 2\frac{y'}{1+y'^2} + 2x\frac{1-y'^2}{(1+y'^2)^2}\frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dy'} = 2x\frac{y'^2-1}{(1+y'^2)(3+y'^2)y'}.$$

Si on considère x comme fonction de la variable y', c'est une équation linéaire :

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{3y'}{1+y'^2} - \frac{2y'}{3+y'^2} - \frac{1}{y'}\right)2\frac{dy'}{3}$$

$$3\,\mathrm{L}x = 3\,\mathrm{L}(1+y'^2) - 2\,\mathrm{L}(3+y'^2) - 2\,\mathrm{L}y' + 3\,\mathrm{L}c$$

$$x^3 = c^3\frac{(1+y'^2)^3}{y'^2(3+y'^2)^2}, \qquad x = \frac{c(1+y'^2)}{y'^{\frac{2}{3}}(3+y'^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

De l'équation donnée on déduit

$$y = -2x\frac{y'}{1+y'^2} = -2c\frac{y'^{\frac{1}{3}}}{(3+y'^2)^{\frac{2}{3}}}$$

ces équations représentent les courbes intégrales. Pour les ramener à la première forme, il suffit de poser

$$y' = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2},$$

on a :

$$y = 2x\frac{\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}} = x\sin\theta$$

$$x^3 = \frac{c^3}{\sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(3+\operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{2c^3}{(1+\cos\theta)(2-\cos\theta)^2}.$$

2° Par rapport à la parabole $x^2 = 2y$, le point (x, y) a pour polaire la droite $\mathrm{X}x = \mathrm{Y} + y$. Inversement, la droite $y = mx + p$ a pour pôle le point $\mathrm{X} = m$, $\mathrm{Y} = -p$. Si une courbe passe au point (x, y) et a une tangente de coefficient angulaire y', la courbe polaire réciproque doit passer par le pôle de la tangente

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}y' + y - xy',$$

pôle dont les coordonnées sont $\mathrm{X} = y'$, $\mathrm{Y} = xy' - y$; en ce point la tangente doit être la polaire du point (x, y), de sorte que son

coefficient angulaire doit être $Y' = x$, ces valeurs X, Y, Y' doivent vérifier l'équation différentielle donnée :

$$Y(1 + Y'^2) + 2XY' = 0$$

ce qui donne, pour les courbes polaires réciproques, l'équation différentielle :

$$(xy' - y)(1 + x^2) + 2y'x = 0$$
$$y'x(3 + x^2) = y(1 + x^2)$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{1 + x^2}{x(3 + x^2)}\,dx = \left(\frac{2x}{3 + x^2} + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{3}$$
$$3Ly = Lx + L(3 + x^2) + Lc$$
$$y^3 = cx(3 + x^2).$$

3° La polaire d'un point (x, y) de cette courbe a pour équation

$$Xx = Y + \sqrt[3]{cx(3 + x^2)}.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient en prenant la dérivée par rapport au paramètre x :

$$X = \sqrt[3]{c}\,\frac{1 + x^2}{[x(3 + x^2)]^{\frac{2}{3}}}, \qquad Y = -\frac{2x\sqrt[3]{c}}{[x(3 + x^2)]^{\frac{2}{3}}} = -X\,\frac{2x}{1 + x^2}.$$

Il suffit de poser $c = c'^3$ et $x = y'$ pour retrouver les courbes intégrales sous la seconde forme.

121. L'équation sans second membre :

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

admet la solution $y = e^{\alpha x}$, où

$$\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \qquad (\alpha - 1)^2(\alpha + 1) = 0$$

ce qui donne la solution générale

$$y = ce^{-x} + e^x(c'x + c'').$$

Pour $y = ax + b$, le premier membre devient égal à $b - a + ax$ qui sera égal à $3x$ si $a = b = 3$.

Pour avoir la solution générale de l'équation complète

$$y''' - y'' - y' + y = (24x - 4)e^x + 3x$$

on peut poser

$$y = ce^{-x} + e^x(c'x + c'') + 3(x + 1) + e^x z$$

où z est un polynôme tel que $e^x z$ rende le premier membre égal à

$e^x(24x - 4)$. Comme le premier membre s'annule lorsque z est du premier degré, il faut prendre pour z un polynôme du troisième degré, et il est inutile d'y introduire les termes du premier degré qui resteraient arbitraires. Soit :

$$y = e^x(ax^3 + bx^2), \qquad y' = e^x(ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx)$$
$$y' - y = e^x(3ax^2 + 2bx)$$
$$y'' - y' = e^x(3ax^2 + 2bx + 6ax + 2b)$$
$$y''' - y'' = e^x(3ax^2 + 2bx + 12ax + 4b + 6a)$$
$$y - y' - y'' + y''' = e^x(12ax + 4b + 6a)$$

qui sera égal à $e^x(24x - 4)$ si $a = 2$, $b = -4$.

La solution générale est

$$y = ce^{-x} + e^x(2x^3 - 4x^2 + c'x + c'') + 3(x + 1).$$

Pour $x = 0$, on suppose :

$$y_0 = c + c'' + 3 = 1$$
$$y_0' = -c + c' + c'' + 3 = -1$$
$$y_0'' = c - 8 + 2c' + c'' = 0$$
$$c = \frac{7}{2}, \qquad c' = 5, \qquad c'' = -\frac{11}{2}$$

$$y = \frac{7}{2}e^{-x} + e^x\left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{11}{2}\right) + 3(x + 1)$$

$$y' = -\frac{7}{2}e^{-x} + e^x\left(2x^3 + 2x^2 - 3x - \frac{1}{2}\right) + 3.$$

Pour $x = 0{,}8$ on a :

$$y = \frac{7}{2}e^{-0,8} - 3{,}036e^{0,8} + 5{,}4$$
$$= 5{,}4 + 0{,}464\left(1 + \frac{0{,}8^2}{2} + \frac{0{,}8^4}{2.3.4} + \ldots\right) -$$
$$- 6{,}536\left(0{,}8 + \frac{0{,}8^3}{2.3} + \frac{0{,}8^5}{2.3.4.5} + \ldots\right)$$
$$= 5{,}4 + 0{,}464 \times 1{,}337 - 6{,}536 \times 0{,}8881 = 0{,}216$$

$$y' = -\frac{7}{2}e^{-0,8} - 0{,}636e^{0,8} + 3 =$$
$$= 3 - 4{,}136 \times 1{,}337 + 2{,}864 \times 0{,}8881 = 0{,}014.$$

CHAPITRE V

—

COURBES PLANES

122. La distance de l'origine à la tangente

$$Y - y = (X - x)y'$$

est

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

ce qui donne l'équation

$$(y - xy')^2 = (1 + y'^2)a^2x^2$$

où a est une constante donnée

$$x^2y'^2(a^2 - 1) + 2xyy' + a^2x^2 - y^2 = 0$$

$$y' = \frac{-y \pm a\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2}}{(a^2 - 1)x}$$

c'est une équation homogène entre x et y, que l'on peut ramener à une équation linéaire en posant

$$y = tx, \qquad y' = t + x\frac{dt}{dx}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{-ta^2 + a\sqrt{t^2 + 1 - a^2}}{a^2 - 1}.$$

En prenant le signe + du radical,

$$\frac{dx}{x} = (a^2 - 1)\frac{ta^2 + a\sqrt{t^2 + 1 - a^2}}{a^2(1 - a^2)(1 + t^2)}\,dt.$$

Posons $t = \sqrt{1 - a^2}\,\mathrm{tg}\,\theta$

$$\frac{dx}{x} + \frac{tdt}{1 + t^2} = -\sqrt{t^2 + 1 - a^2}\,\frac{dt}{a(1 + t^2)} = \frac{a^2 - 1}{a}\,\frac{d\theta}{\cos\theta(1 - a^2\sin^2\theta)} =$$

$$= \left(\frac{a}{1 - a^2\sin^2\theta} - \frac{1}{a(1 - \sin^2\theta)}\right)\cos\theta d\theta =$$

$$= \left(\frac{1}{1 - a\sin\theta} + \frac{1}{1 + a\sin\theta}\right)\frac{a}{2}\cos\theta d\theta - \left(\frac{1}{1 - \sin\theta} + \frac{1}{1 + \sin\theta}\right)\frac{\cos\theta d\theta}{2a}$$

$$2\mathrm{L}x + \mathrm{L}(1 + t^2) = \mathrm{L}\,\frac{1 + a\sin\theta}{1 - a\sin\theta} + \frac{1}{a}\,\mathrm{L}\,\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} + \mathrm{L}c$$

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1 - a^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2}}$$

$$x^2 + y^2 = c\left(\frac{\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} + ay}{\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - ay}\right)\left(\frac{\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - y}{\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} + y}\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$(\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - ay)^2 = c(1 - a^2)\left[\frac{(\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - y)^2}{(1 - a^2)x^2}\right]^{\frac{1}{a}}$$

ou

$$x\,(\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - ay)^a = c'(\sqrt{y^2 + (1 - a^2)x^2} - y).$$

123. La tangente au point $\mathrm{M}(x, y)$ a pour équation :

$$\mathrm{Y} - y = (\mathrm{X} - x)y'$$

le point T a pour coordonnées :

$$\mathrm{Y} = 0. \qquad \mathrm{X} = x - \frac{y}{y'}.$$

Le milieu de MT est :

$$\mathrm{X} = x - \frac{y}{2y'}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{y}{2}.$$

On a :

$$\mathrm{Y}^2 = 2p\mathrm{X}, \qquad y^2 = 8p\left(x - \frac{y}{2y'}\right).$$

Cette équation différentielle peut s'écrire :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dy} - \frac{2x}{y} + \frac{y}{4p} = 0.$$

Si x est considéré comme fonction de la variable y, cette équation est linéaire entre x et $\frac{dx}{dy}$. En intégrant d'abord l'équation homogène $\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y}$ on a :

$$\mathrm{L}x = 2\mathrm{L}y + \mathrm{L}c, \qquad x = cy^2.$$

Si on pose $x = zy^2$, où z est une fonction de y, l'équation (1) devient :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-1}{4py}$$

dont l'intégrale est

$$z = -\frac{1}{4p}\,\mathrm{L}y + c, \qquad x = cy^2 - \frac{y^2}{4p}\,\mathrm{L}y.$$

Si $c = 0$, on a la courbe

$$x = \frac{-y^2}{4p}\,\mathrm{L}y, \qquad \frac{dx}{dy} = -y\,\frac{1 + 2\mathrm{L}y}{4p}, \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{3 + 2\mathrm{L}y}{4p}.$$

Il faut $y > 0$, pour que x soit réel. Si y tend vers zéro, $y\mathrm{L}y$ tend vers zéro. Lorsque y croît de 0 à $\frac{1}{\sqrt{e}}$, x croît de 0 à $\frac{1}{8pe}$. Si y croît de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ à $+\infty$, x décroît de $\frac{1}{8pe}$ à $-\infty$. A l'origine la courbe est tangente à oY, la direction asymptotique est parallèle à oX. Il y a un point d'inflexion (*fig.* 8)

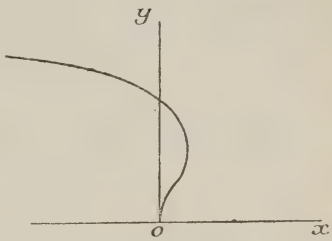


Fig. 8

$$y = \frac{1}{e\sqrt{e}}, \qquad x = \frac{3}{8pe^3}.$$

124. L'abscisse de T est :

$$\mathrm{X} = x - \frac{y}{y'},$$

on a :

$$xy = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

c'est une équation homogène entre x et y. En posant, pour éviter les radicaux, $y = t^2x$, on a :

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dt}{1 - t}, \qquad \mathrm{L}x + 2\mathrm{L}(1 - t) = \mathrm{L}c.$$

$$x\left(1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = c$$

$$(x + y - c)^2 = 4xy$$

ou

$$(x - y)^2 = 2c\left(x + y - \frac{c}{2}\right)$$

système de paraboles tangentes aux axes de coordonnées. La

corde de contact $x + y = c$ reste parallèle à la bissectrice de l'angle X'OY.

125. La droite MD a pour équation

$$Y = -y'X + y + xy'.$$

Elle coupe la parabole $Y^2 = 2pX$ aux points déterminés par l'équation

$$(Xy' - xy' - y)^2 = 2pX,$$
$$X^2y'^2 - 2X(p + yy' + xy'^2) + (xy' + y)^2 = 0.$$

Cette droite est tangente à la parabole, si l'on a :

$$(p + yy' + xy'^2)^2 = y'^2(xy' + y)^2$$
$$p + 2yy' + 2xy'^2 = 0.$$

Equation du premier degré entre x et y

$$y + xy' + \frac{p}{2y'} = 0$$

dont la dérivée s'écrit :

$$2y' + \frac{dy'}{dx}\left(x - \frac{p}{2y'^2}\right) = 0$$
$$2y'\frac{dx}{dy'} + x = \frac{p}{2y'^2}$$

Si on considère x comme fonction de y', cette équation est linéaire entre x et sa dérivée $\frac{dx}{dy'}$. En posant

$$x = \frac{z}{\sqrt{y'}},$$

elle devient :

$$2\sqrt{y'}\frac{dz}{dy'} = \frac{p}{2y'^2},$$

$$z = -\frac{p}{6}y'^{-\frac{3}{2}} + c, \qquad x = \frac{c}{\sqrt{y'}} - \frac{p}{6y'^2}$$

et

$$y = -xy' - \frac{p}{2y'} = -c\sqrt{y'} - \frac{p}{3y'}.$$

En posant $y' = t^2$, on peut représenter cette courbe par les équations (*fig.* 9) :

$$x = \frac{6ct^3 - p}{6t^4}, \qquad y = -ct - \frac{p}{3t^2}, \qquad x' = \frac{-c}{t^2} + \frac{2p}{3t^5},$$

$$x'' = \frac{2c}{t^3} - \frac{10p}{3t^6}, \qquad y' = t^2x', \qquad y'' = 2tx' + t^2x''.$$

Le rayon de courbure

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''} = \frac{(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}}{6t^6}(2p - 3ct^3).$$

126. La tangente $Y - y = (X - x)y'$ coupe les axes aux points

$$X = \frac{xy' - y}{y'}, \qquad \text{et} \qquad Y = y - xy'.$$

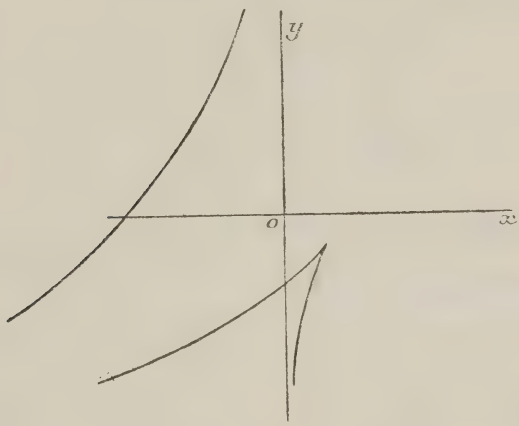


Fig. 9

On a donc l'équation différentielle

$$(xy' - y)\left(\frac{1}{y'} - 1\right) = a$$

ou

$$y = xy' + a\frac{y'}{y' - 1}$$

c'est une équation de Clairaut, dont la solution générale est formée des droites

$$y = cx + a\frac{c}{c - 1}$$

qui coupent les axes aux points A et B, tels que $OA + OB = a$. Pour avoir la solution singulière, enveloppe de ces droites, il faut exprimer que l'équation, mise sous la forme

$$c^2x + c(a - x - y) + y = 0$$

donne pour c deux valeurs égales :

$$(a - x - y)^2 = 4xy$$
$$(x - y)^2 = 2a(x + y) - a^2.$$

C'est une parabole de sommet $x = y = \frac{a}{4}$.

2° Sur cette parabole, on a :

$$(x - y)(dx - dy) = a(dx + dy).$$

Le coefficient angulaire de la tangente est

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x - y - a}{x - y + a}.$$

Elle forme, avec la droite $y = x$, un angle φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{a}{y - x}.$$

En prenant φ pour variable, on a :

$$y - x = a \operatorname{cotg} \varphi, \qquad y + x = \frac{a}{2}(1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi)$$

$$y = \frac{a}{4}(1 + \operatorname{cotg} \varphi)^2, \qquad x = \frac{a}{4}(1 - \operatorname{cotg} \varphi)^2$$

$$dy = -a \frac{1 + \operatorname{cotg} \varphi}{2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \qquad dx = a \frac{1 - \operatorname{cotg} \varphi}{2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$ds^2 = a^2 \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi}{2 \sin^4 \varphi} d\varphi^2 = \frac{a^2}{2 \sin^6 \varphi} d\varphi^2$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} =$$

$$= \frac{a}{4\sqrt{2}} \sin \varphi d\varphi \left(\frac{1}{(1 - \cos \varphi)^2} + \frac{1}{(1 + \cos \varphi)^2} + \frac{1}{1 + \cos \varphi} + \frac{1}{1 - \cos \varphi}\right)$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} = \frac{a}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \frac{1}{1 - \cos \varphi} - \mathrm{L} \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}\right)$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{2}} \left(\mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\right).$$

3° L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des

lignes L (système de droites) s'obtient en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$ dans leur équation différentielle, ce qui donne :

$$\left(y + \frac{x}{y'}\right)(y' + 1) = a$$

$$y + \frac{x}{y'} = \frac{a}{1 + y'}.$$

Pour intégrer cette équation, on peut d'abord la différentier, on a :

$$y' + \frac{1}{y'} = \frac{dy'}{dx}\left(\frac{x}{y'^2} - \frac{a}{(1 + y')^2}\right)$$

ou, en considérant x comme une fonction de la variable y' :

$$\frac{dx}{dy'} = \frac{x}{y'(1 + y'^2)} - \frac{ay'}{(1 + y')^2(1 + y'^2)}.$$

Pour conserver la même variable, en remarquant que la direction des tangentes a tourné d'un angle droit, posons

$$y' = \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), \qquad dy' = \frac{d\varphi}{\cos^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)},$$

on aura :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{x}{\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{a \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\left[1 + \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{a}{4 \operatorname{tg}^2\varphi}(1 - \operatorname{tg}^2\varphi).$$

Pour intégrer cette équation linéaire, on est conduit à poser :

$$x = u \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

elle devient :

$$\frac{du}{d\varphi} = a\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{4 \operatorname{tg}^2\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{2\sqrt{2}\sin^2\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)} =$$

$$= -a\,\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{2\sqrt{2}\sin^2\varphi} = -\frac{a}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right)$$

$$u = \frac{a}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\right)$$

$$x = \frac{a}{2\sqrt{2}}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\right).$$

L'équation différentielle, où l'on remplace x et y' en fonction de φ, donne :

$$y = \frac{a\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\varphi} - x\,\mathrm{cotg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{2}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - c\right).$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$x = \frac{a}{4}(1 - \mathrm{cotg}\,\varphi)\left[1 + \sin\varphi\left(c - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$y = \frac{a}{4}(1 + \mathrm{cotg}\,\varphi)\left[1 - \sin\varphi\left(c - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Elles représentent les trajectoires orthogonales des tangentes à la parabole, ou les développantes de la parabole, que l'on obtient en portant sur chaque tangente une longueur égale à $c' - s$, ce qui donne le point :

$$x = \frac{a}{4}(1 - \mathrm{cotg}\,\varphi)^2 + a\,\frac{1 - \mathrm{cotg}\,\varphi}{4}\sin\varphi\left(c + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$y = \frac{a}{4}(1 + \mathrm{cotg}\,\varphi)^2 - a\,\frac{1 + \mathrm{cotg}\,\varphi}{4}\sin\varphi\left(c + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right).$$

Une simple réduction montre que ces formules sont identiques.

127. L'équation différentielle (2) peut s'écrire :

$$\left(x\frac{dy}{dx} - 2y\right)^2 + 4h\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) + x^2 = 0.$$

Si on pose $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{K}x^2$

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = -x\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

on a

$$x^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 4h\mathrm{K}x^2 + x^2 = 0$$

qui est vérifiée quel que soit x, si

$$4h\mathrm{K} = -1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha.$$

L'intégrale générale de l'équation donnée est

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{4h} x^2.$$

2° L'enveloppe de ces paraboles doit représenter la solution singulière. Cette enveloppe, obtenue en exprimant que $\operatorname{tg} \alpha$ a une racine double, sera :

$$(2hx)^2 = (x^2 + 4hy)x^2, \qquad 4hy = 4h^2 - x^2.$$

On arrive à la même équation en exprimant que l'équation différentielle donne pour $\frac{dy}{dx}$ deux valeurs égales, ce qui donnerait l'équation équivalente :

$$4(y - h)^2 = x^2 - 4hy + 4y^2$$

ou

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

Il est facile de vérifier que cette fonction est une solution de l'équation différentielle.

3° La solution générale peut se représenter par les équations :

$$x = t \cos \alpha, \qquad y = t \sin \alpha - \frac{t^2}{4h}$$

où α est constant, on a alors :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \alpha - \frac{t}{2h}}{\cos \alpha}.$$

Si α est une fonction de t, le point (x, y) décrit une courbe sur laquelle on a :

$$dx = \cos \alpha dt - t \sin \alpha d\alpha$$

$$dy = \left(\sin \alpha - \frac{t}{2h}\right) dt + t \cos \alpha d\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sin \alpha - \frac{t}{2h}\right) dt + t \cos \alpha d\alpha}{\cos \alpha \, dt - t \sin \alpha d\alpha}$$

au point (t, α) cette courbe a sa tangente perpendiculaire à celle de la parabole qui passe au même point, si les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ ont pour produit -1, ou :

$$\left(\sin \alpha - \frac{t}{2h}\right)\left[\left(\sin \alpha - \frac{t}{2h}\right) dt + t \cos \alpha d\alpha\right] + \cos \alpha (\cos \alpha dt - t \sin \alpha d\alpha) = 0$$

$$\left(1 - \frac{t}{h}\sin\alpha + \frac{t^2}{4h^2}\right)dt - \frac{t^2}{2h}\cos\alpha d\alpha = 0$$

$$\left(1 + \frac{t^2}{h^2}\right)dt = \frac{1}{2h}(2t\sin\alpha dt + t^2\cos\alpha d\alpha) = \frac{1}{2h}d(t^2\sin\alpha)$$

$$t + \frac{t^3}{12h^2} = \frac{t^2\sin\alpha}{2h} + c.$$

Les trajectoires orthogonales sont représentées par les équations :

$$y = 2h - \frac{t^2}{12h} - \frac{2ch}{t}$$

$$x^2 = t^2 - \left(2h + \frac{t^2}{6h} - \frac{2ch}{t}\right)^2.$$

128. Soit une tangente au cercle

$$(1) \qquad x\cos\omega + y\sin\omega = R.$$

Le rayon du point de contact, $y = x\operatorname{tg}\omega$, coupe la parabole $x^2 = 2py$ au point Q

$$x = 2p\operatorname{tg}\omega, \qquad y = 2p\operatorname{tg}^2\omega.$$

Supposons que x et y soient des fonctions de ω qui vérifient l'équation (1), le point M engendrera une courbe, dont la normale a pour équation

$$(Y - y)y' + (X - x)x' = 0,$$

elle passera par Q si l'on a :

$$(2p\operatorname{tg}^2\omega - y)y' + (2p\operatorname{tg}\omega - x)x' = 0$$

en tenant compte de l'équation (1), où x et y sont fonctions de ω, on aura :

$$x'\cos\omega + y'\sin\omega - x\sin\omega + y\cos\omega = 0$$

$$\frac{x'}{2p\operatorname{tg}^2\omega - y} = \frac{y'}{x - 2p\operatorname{tg}\omega} = \frac{x\sin\omega - y\cos\omega}{(2p\operatorname{tg}^2\omega - y)\cos\omega + (x - 2p\operatorname{tg}\omega)\sin\omega} = 1$$

$$x' = \frac{dx}{d\omega} = 2p\operatorname{tg}^2\omega - y, \qquad y' = \frac{dy}{d\omega} = x - 2p\operatorname{tg}\omega$$

$$y'' = x' - \frac{2p}{\cos^2\omega} = -y - 2p$$

équation linéaire du second ordre, dont la solution générale est

$$y = -2p + c\cos\omega + c'\sin\omega$$

on en déduit

$$x = 2p \operatorname{tg} \omega + y' = 2p \operatorname{tg} \omega - c \sin \omega + c' \cos \omega.$$

Il faut que le point (x, y) soit sur la droite (1)

$$x \cos \omega + y \sin \omega = c' = \mathrm{R}.$$

Il ne reste qu'une constante arbitraire c. Ces équations représentent les courbes cherchées en fonction du paramètre ω.

$$x = 2p \operatorname{tg} \omega - c \sin \omega + \mathrm{R} \cos \omega$$
$$y = -2p + c \cos \omega + \mathrm{R} \sin \omega.$$

129. Le centre de courbure au point M (x, y) a pour ordonnée

$$\mathrm{Y} = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

La normale coupe $o\mathrm{X}$ au point N d'ordonnée $\mathrm{Y} = o$. Si M est entre N est le centre de courbure c, l'ordonnée du centre de courbure sera égale à $5y$. Si N et c sont du même côté de M, l'ordonnée de c est $-3y$. On a ainsi

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = \pm 4y$$

$$\frac{2y''y'}{1 + y'^2} > \pm \frac{y'}{2y}, \qquad \mathrm{L}(1 + y'^2) = \pm \frac{1}{2} \mathrm{L}y + \mathrm{L}c$$

$$1 + y'^2 = c\sqrt{y} \qquad \text{ou} \qquad \frac{c}{\sqrt{y}}.$$

1° Cas, M entre N et c, en posant $y' = t$, $a = \frac{1}{c^2}$; on aura

$$y = a(1 + t^2)^2$$
$$dx = \frac{dy}{t} = 4a\,(1 + t^2)\,dt$$
$$x = 4a\left(t + \frac{t^3}{3}\right).$$

La constante que l'on pourrait ajouter à x étant supposée nulle. En changeant t en $-t$, on voit que la courbe est symétrique par rapport à oy. Si t augmente de o à ∞, x et y augmentent, on a des branches paraboliques (*fig.* 10).

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4^2a^2(1 + t^2)^3dt^2$$
$$ds = 4a(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}dt.$$

Si $t = \operatorname{tg}\theta$,

$$ds = 4a\frac{d\theta}{\cos^5\theta} = \frac{a}{4}\left(\frac{2}{(1-\sin\theta)^3} + \frac{2}{(1+\sin\theta)^3} + \frac{3}{(1-\sin\theta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{(1+\sin\theta)^2} + \frac{3}{1-\sin\theta} + \frac{3}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta d\theta$$

$$s = \frac{a}{4}\left(\frac{1}{(1-\sin\theta)^2} - \frac{1}{(1+\sin\theta)^2} + \frac{3}{1-\sin\theta} - \frac{3}{1+\sin\theta} + 3\mathrm{L}\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) =$$

$$= a\left(\sin\theta\,\frac{2+3\cos^2\theta}{2\cos^4\theta} + \frac{3}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right).$$

La normale a pour équation :

$$t\mathrm{Y} + \mathrm{X} = \frac{a}{3}\,t(15 + 10t^2 + 3t^4).$$

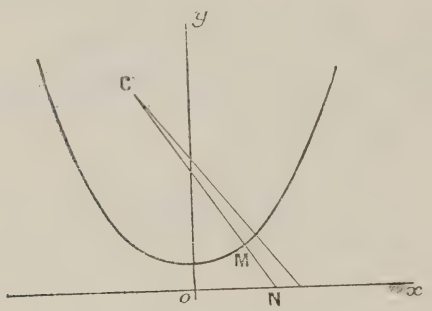


Fig. 10

Elle coupe ox au point

$$\mathrm{X} = \frac{a}{3}\,t(15 + 10t^2 + 3t^4).$$

Si t varie de dt, le point N se déplace de

$$d\mathrm{X} = a(5 + 10t^2 + 5t^4)dt = 5a(1 + t^2)^2dt.$$

Deux normales infiniment voisines se coupent au centre de courbure dont l'ordonnée est $5y$, elles forment avec ox un triangle de surface

$$\frac{5y}{2}\,d\mathrm{X} = \frac{25}{2}\,a^2(1 + t^2)^4dt.$$

La portion cM de la normale est égale à $\frac{4}{5}$ cN, il en résulte que l'aire comprise entre les normales infiniment voisines et la courbe

est égale aux $\frac{16}{25}$ de l'aire limitée par ox, et l'aire comprise entre les deux normales, la courbe, et ox est égale à

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{5y}{2} dX = \frac{9}{2} a^2(1 + t^2)^4 dt.$$

L'aire comprise entre oy, ox et une normale sera l'intégrale de cette expression de o à t

$$A = \frac{9}{2} a^2 \int_o^t (1 + 4t^2 + 6t^4 + 4t^6 + t^8) dt$$

$$= \frac{9}{2} a^2 (t + \frac{4}{3} t^3 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{4}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9)$$

Le point N a pour coordonnées

$$Y = o, \qquad X = x + ty.$$

La longueur

$$MN = y\sqrt{1 + t^2},$$

le rayon de courbure est

$$R = 4y\sqrt{1 + t^2} = 4y\sqrt[4]{\frac{y}{a}}.$$

2° Cas, N est entre M et c, soit :

$$y' = t = \operatorname{tg} \theta, \qquad y = \frac{a}{(1 + t^2)^2} = a \cos^4 \theta$$

$$dx = \frac{dy}{t} = \frac{-4a}{(1 + t^2)^3} dt = -4a \cos^4 \theta d\theta =$$

$$= -\frac{a}{2}(3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) d\theta$$

$$x = -\frac{a}{2}(3\theta + 2 \sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta)$$

le point x, y de la courbe est exprimé en fonction de θ.

Si on change θ en $-\theta$ on a deux points symétriques par rapport à oy. Si on change θ en $\theta + \pi$, y ne change pas, x augmente de $-\frac{3}{2} a\pi$ la courbe se reproduit par un déplacement parallèle à ox. Supposons $a > o$, si θ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, x décroît de o à $-\frac{3a\pi}{4}$, y décroît de a à o. La tangente a pour coefficient angulaire

tg θ, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\frac{\pi}{2} + K\pi$, on a des points de rebroussement (*fig.* 11)

$$ds^2 = (1 + \operatorname{tg}^2\theta)16a^2 \cos^8 \theta d\theta^2 = 16a^2 \cos^6 \theta d\theta^2$$
$$ds = 4a \cos^3 \theta d\theta = 4a(1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta$$
$$s = 4a(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3\theta).$$

La normale a pour équation

$$Y \sin \theta + X \cos \theta = y \sin \theta + x \cos \theta = -\frac{3}{2} a \cos \theta (\theta + \sin \theta \cos \theta)$$

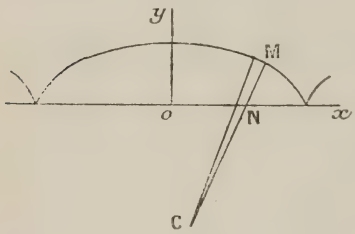


Fig. 11

elle forme avec ox l'angle $\theta - \frac{\pi}{2}$, deux normales infiniment voisines forment l'angle $d\theta$.

La normale limitée à ox a pour longueur

$$MN = y\sqrt{1 + t^2} = a \cos^3 \theta$$

le rayon de courbure est

$$R = 4a \cos^3 \theta.$$

L'aire comprise entre deux rayons de courbure infiniment voisins et la courbe est

$$\frac{1}{2} R^2 d\theta = 8a^2 \cos^6 \theta d\theta$$

comme $cN = \frac{3}{4} cM$, l'aire limitée par ox est les $\frac{9}{16}$ de cette aire, et l'aire comprise entre la courbe ox, et deux normales infiniment voisines, est $\frac{7}{2} a^2 \cos^6 \theta d\theta$. L'aire comprise entre oy la courbe, ox et une normale est

$$A = \frac{7}{2} a^2 \int_0^\theta \cos^6 \theta d\theta = \frac{7}{64} a^2 \int_0^\theta (10 + 15 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta + \cos 6\theta) d\theta$$
$$= \frac{7}{64} a^2 (10\theta + \frac{15}{2} \sin 2\theta + \frac{3}{2} \sin 4\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta).$$

Le rayon de courbure est

$$R = 4a \cos^3 \theta = 4a \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

130. L'équation différentielle des courbes données est

$$(x^2 + y^2)(xdx + ydy) + b^2(ydy - xdx) = 0$$

on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$

$$(x^2 + y^2)(xdy - ydx) - b^2(ydx + xdy) = 0$$

$$(xdy - ydx)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = b^2 \frac{d(xy)}{x^2y^2}$$

$$\frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{b^2}{xy} = c$$

$$y^2 - x^2 + b^2 = cxy.$$

131. La distance de l'origine à la tangente

$$Y - y - y'(X - x) = 0$$

est

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

la normale

$$(Y - y)y' + X - x = 0$$

coupe ox au point N, $Y = 0$, $X = x + yy'$. La distance MN de ce point à la tangente, supposée comptée dans le même sens que celle de o, est

$$\frac{-y - yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

on a donc la relation :

$$y(1 + y'^2) = K(y - xy')$$

$$yy'^2 + Kxy' + y(1 - K) = 0$$

$$y' = \frac{-Kx \pm \sqrt{K^2x^2 + 4y^2(K - 1)}}{2y}.$$

Equation homogène entre x et y. Si on pose $y = tx$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 + 4(K - 1)t^2}}{2t}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2t\,dt}{-2t^2 - K \pm \sqrt{K^2 + 4(K - 1)t^2}}$$

Posons

$$2t\sqrt{K - 1} = K \operatorname{tg} \theta$$

en supposant $K > 1$, on a :

$$\frac{dx}{x} = \frac{-K \sin\theta\, d\theta}{\cos\theta[K + (K-2)\cos^2\theta \pm 2(K-1)\cos\theta]}$$

En changeant θ en $\theta + \pi$, $\operatorname{tg}\theta$ ne change pas, et $\cos\theta$ change de signe ; on peut ainsi prendre seulement le signe $+$.

$$\frac{dx}{x} = \frac{K \sin\theta\, d\theta}{\cos\theta(1+\cos\theta)(K + (K-2)\cos\theta)}$$

$$= \left(\frac{2}{\cos\theta} - \frac{K}{1+\cos\theta} + \frac{(K-2)^2}{K + (K-2)\cos\theta}\right)\frac{\sin\theta\, d\theta}{2}$$

$$Lx = L\frac{1}{\cos\theta} + \frac{K}{2}L(1+\cos\theta) + \frac{2-K}{2}L(K + (K-2)\cos\theta) + c$$

où

$$\cos\theta = Kx\sqrt{\frac{1}{K^2x^2 + 4y^2(K-1)}}.$$

Lorsque $K = 1$, ce changement de variable n'est plus possible ; mais l'équation différentielle se réduit à

$$(yy' + x)y' = 0$$

ce qui donne les deux solutions évidentes :

$$y^2 + x^2 = a, \qquad y = b$$

cercle de centre o, droite parallèle à ox.

Si $K = 2$,

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$Lx = L\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} + c$$

$$x = a\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)$$

$$(x-a)^2x^2 = a^2(x^2+y^2)$$

$$x^3(x-2a) = a^2y^2.$$

Si $K = 3$,

$$\cos\theta = 3x\sqrt{\frac{1}{9x^2+8y^2}}$$

$$Lx = -L\cos\theta + \frac{3}{2}L(1+\cos\theta) - \frac{1}{2}L(3+\cos\theta) + c$$

$$x^2 = a\frac{(1+\cos\theta)^3}{\cos^2\theta\,(3+\cos\theta)}, \qquad y = \frac{3}{2\sqrt{2}}x\operatorname{tg}\theta.$$

Lorsque $K < 1$, on peut poser $t = \frac{K}{2\sqrt{1-K}} \sin u$

$$\frac{dx}{x} = \frac{K \sin u \cos u \, du}{K - 2 + K\cos^2 u + 2(K-1)\cos u} = \frac{K \sin u \cos u \, du}{(1+\cos u)(K-2+K\cos u)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\cos u} - \frac{K-2}{K-2+K\cos u}\right)\frac{K}{2} \sin u \, du$$

$$Lx = -\frac{K}{2} L(1+\cos u) + \frac{K-2}{2} L(K-2+K\cos u).$$

132. Le centre de courbure a pour abscisse :

$$X = x - y' \frac{1+y'^2}{y''}.$$

La tangente coupe OX au point $X = x - \frac{y}{y'}$.

La demi-somme de ces abscisses doit être égale à x.

$$x - \frac{y}{2y'} - y' \frac{1+y'^2}{2y''} = x$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{y''}{y'(1+y'^2)} = y''\left(\frac{y'}{1+y'^2} - \frac{1}{y'}\right)$$

$$Ly = \frac{1}{2} L(1+y'^2) - Ly' - \frac{1}{2} Lc$$

$$cy^2 = \frac{1+y'^2}{y'^2}, \qquad y'^2 = \frac{1}{cy^2-1}$$

$$dx = \sqrt{cy^2-1}\, dy = \left(\frac{2cy^2-1}{\sqrt{cy^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{cy^2-1}}\right)\frac{dy}{2}$$

$$2x = y\sqrt{cy^2-1} - \frac{1}{\sqrt{c}} L(y\sqrt{c} + \sqrt{cy^2-1}) + c'.$$

Cette courbe c peut se représenter, en posant $c = \frac{1}{a^2}$, et en choisissant l'origine, par les équations :

$$y = \frac{a}{\sin t}, \qquad x = \frac{a}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + L \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-a\cos t}{\sin^2 t}, \qquad \frac{dx}{dt} = -a\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}, \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t.$$

2° La normale a pour équation :

$$Y \sin t + X \cos t = y \sin t + x \cos t.$$

La distance du point P(x, o) à cette normale est :

$$y \sin t = a$$

elle est constante.

3° Si on change t en $\pi - t$, y ne change pas, x change de signe, la courbe est symétrique par rapport à oy. Il faut que $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$ soit positif, pour que son logarithme soit réel. Si t varie de o à $\frac{\pi}{2}$, x diminue de $+\infty$ à o, et y de $+\infty$ à a, comme $\operatorname{tg} t = \frac{dy}{dx}$ varie de o à ∞, la courbe a un point de rebroussement (o, a) sur oy, et des branches infinies paraboliques (*fig.* 12).

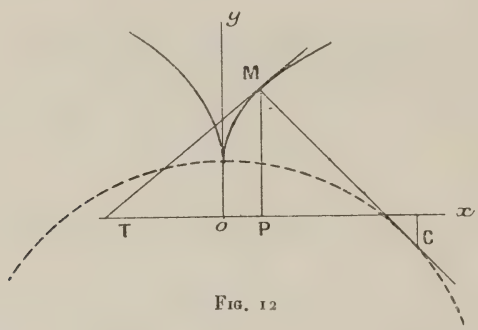


Fig. 12

En prenant les dérivées par rapport à t, on a :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2 \cos^2 t}{\sin^6 t}$$

$$x'' = a \frac{2 + \cos^2 t}{\sin^4 t} \cos t, \qquad y'' = a \frac{1 + \cos^2 t}{\sin^3 t}$$

$$x'y'' - y'x'' = \frac{a^2 \cos^2 t}{\sin^6 t} = x'^2 + y'^2.$$

Les coordonnées du centre de courbure sont :

$$X = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = x - y' = \frac{a}{2}\left(\frac{3a \cos t}{\sin^2 t} + \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$$

$$Y = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} = y + x' = a \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^3 t}.$$

Sur cette courbe, on a :

$$X' = x' - y'' = -a \frac{1 + 2\cos^2 t}{\sin^3 t}$$

$$Y' = y' + x'' = a \frac{1 + 2\cos^2 t}{\sin^4 t} \cos t, \qquad \frac{dY}{dX} = \frac{Y'}{X'} = -\operatorname{cotg} t.$$

Lorsque t varie de o à $\frac{\pi}{2}$, X diminue de $+\infty$ à o, Y augmente de $-\infty$ à a, de $t = \frac{\pi}{2}$ à π on a la partie symétrique par rapport à OY. La courbe a ainsi une forme analogue à une parabole, dont l'axe serait sur OY.

4° Sur la courbe c on a

$$ds = \frac{a \cos t}{\sin^3 t}\, dt$$

l'arc s, compté à partir du point de rebroussement $t = \frac{\pi}{2}$, sera :

$$s = \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos t}{\sin^3 t}\, dt = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right) = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}^2 t.$$

5° L'aire comprise entre un arc de courbe, ox, et les ordonnées des points t et t_0, sera :

$$A = \int y dx = \int_t^{t_0} \frac{a^2 \cos^2 t}{\sin^4 t}\, dt = a^2 \int_t^{t_0} \operatorname{cotg}^2 t \frac{dt}{\sin^2 t} =$$
$$= \frac{a^2}{3} (\operatorname{cotg}^3 t - \operatorname{cotg}^3 t_0).$$

133. L'enveloppe de la droite

$$x \sin \theta - y \cos \theta = \theta - \cos \theta$$

s'obtient en prenant la dérivée par rapport à θ.

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1 + \sin \theta ;$$

de ces deux équations on déduit les coordonnées du point M :

$$x = \theta \sin \theta + \cos \theta$$
$$y = 1 - \theta \cos \theta + \sin \theta.$$

Ce point peut être obtenu en considérant le cercle de centre (o, 1) et de rayon 1, et en portant sur la tangente au point

$$x = \cos \theta, \qquad y = 1 + \sin \theta,$$

une longueur égale à l'arc θ. Le lieu de ce point M est donc une développante de cercle. La normale à cette courbe est la droite

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = 1 + \sin \theta,$$

c'est la tangente au point

$$x = \cos \theta, \qquad y = 1 + \sin \theta$$

du cercle, qui est le centre de courbure ω au point M. Si, sur la normale ωM, on porte une longueur

$$\omega P = K . \omega M,$$

les coordonnées du point P seront :

$$x = \cos\theta + K\theta \sin\theta$$
$$y = 1 + \sin\theta - K\theta \cos\theta.$$

Si K est constant, ce point décrit une courbe, dont la tangente a pour équation :

$$\frac{Y - y}{\cos\theta - K(\cos\theta - \theta \sin\theta)} = \frac{X - x}{-\sin\theta + K(\sin\theta + \theta\cos\theta)}.$$

La normale a pour équation

$$Y[(1 - K)\cos\theta + K\theta \sin\theta] - X[(1 - K)\sin\theta - K\theta\cos\theta] =$$
$$= (1 - K)\cos\theta + K\theta(K + \sin\theta).$$

En réunissant les termes en θ, on voit qu'elle passe par le point d'intersection des deux droites

$$Y\cos\theta - X\sin\theta = \cos\theta, \qquad Y\sin\theta + X\cos\theta = K + \sin\theta$$

ou :

$$X = K\cos\theta, \qquad Y = 1 + K\sin\theta$$

ce point est sur le rayon du cercle qui passe par le point ω, rayon qui a pour équation $y = 1 + x \operatorname{tg}\theta$, et à la distance K du centre, ce qui permet de construire la normale et la tangente.

Si K est une fonction de θ, l'équation de la normale à la courbe, lieu du point P, est :

$$Y[(1 - K - K'\theta)\cos\theta + K\theta\sin\theta] - X[(1 - K - K'\theta)\sin\theta - K\theta\cos\theta] =$$
$$= (1 - K - K'\theta)\cos\theta + K\theta(K + \sin\theta - K'\theta)$$

elle coupe le rayon $y = 1 + x \operatorname{tg}\theta$ au point

$$X = (K - K'\theta)\cos\theta, \qquad Y = 1 + (K - K'\theta)\sin\theta$$

on portera sur ce rayon la longueur $K - \theta\dfrac{dK}{d\theta}$, pour construire la normale en P.

La tangente à la courbe, lieu de P, forme avec ox l'angle β,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(1 - K - K'\theta)\cos\theta + K\theta\sin\theta}{K\theta\cos\theta - (1 - K - K'\theta)\sin\theta} = \frac{\dfrac{1 - K - K'\theta}{K\theta} + \operatorname{tg}\theta}{1 - \dfrac{1 - K - K'\theta}{K\theta}\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(\theta + u)$$

où

$$\operatorname{tg} u = \frac{1 - K - K'\theta}{K\theta} = \operatorname{tg}(\beta - \theta).$$

La normale ωM forme avec ox l'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$, et avec la tangente en P l'angle $\alpha = \theta - \beta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - u$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K\theta}{1 - K - K'\theta}$$

formule qui donne aussi une construction de la tangente. Si l'angle α est constant, K sera une fonction de θ déterminée par cette équation différentielle :

$$K'\theta + K + K\theta \operatorname{cotg} \alpha - 1 = 0$$

$$(K\theta)' + (K\theta) \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

dont la solution générale est

$$K\theta = Ce^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$$

ce qui donne la courbe :

$$x = \cos \theta + (Ce^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha} + \operatorname{tg}\alpha) \sin \theta$$

$$y = 1 + \sin \theta - (Ce^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha} + \operatorname{tg} \alpha) \cos \theta.$$

Pour $\theta = 0$, on a $x = 1$, $y = 1 - \operatorname{tg} \alpha - C$, qui coïncidera avec le point M, $x = y = 1$, si $C = -\operatorname{tg} \alpha$. La tangente à cette courbe forme avec ox un angle $\beta = \theta + \frac{\pi}{2} - \alpha$ dont la tangente est égale à $\operatorname{cotg}(\alpha - \theta)$, ce qui est facile à vérifier, en prenant les dérivées de x et y ; quelle que soit la constante C, la normale à cette courbe a pour équation :

$$Y \cos(\alpha - \theta) + X \sin(\alpha - \theta) = \cos(\alpha - \theta) - C \cos \alpha e^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha}.$$

La développée, enveloppe de cette normale, s'obtient en prenant la dérivée par rapport à θ.

$$Y \sin(\alpha - \theta) - X \cos(\alpha - \theta) = \sin(\alpha - \theta) + C \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} e^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha}$$

ces deux équations donnent :

$$X = -C \operatorname{cotg} \alpha e^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha} \cos \theta, \qquad Y = 1 - C \operatorname{cotg} \alpha e^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha} \sin \theta.$$

Si on prend pour origine le centre (0, 1) du cercle, cette développée a pour équation, en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\rho = -C \operatorname{cotg} \alpha e^{-\theta \operatorname{cotg} \alpha}$$

spirale logarithmique.

134. Le point T a pour coordonnées

$$Y = 0, \qquad X = x - \frac{y}{y'}.$$

La parallèle à la normale, menée par T, a pour équation

$$Yy' + X = x - \frac{y}{y'}$$

elle coupe la droite $X = x$, perpendiculaire à ox, au point P,

$$X = x, \qquad Y = -\frac{y}{y'^2}.$$

Le centre de courbure C a pour coordonnées :

$$x - y' \frac{1 + y'^2}{y''} \qquad \text{et} \qquad y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

La droite PC a pour équation :

$$\frac{Y + \frac{y}{y'^2}}{(1 + y'^2)\left(\frac{y}{y'^2} + \frac{1}{y''}\right)} = \frac{X - x}{-y' \frac{1 + y'^2}{y''}}$$

elle coupe ox au point :

$$X = x - \frac{yy'}{yy'' + y'^2}.$$

On doit avoir :

$$\frac{yy'}{yy'' + y'^2} = x\big(1 - f(x)\big)$$

$$\frac{yy'' + y'^2}{yy'} = \frac{1}{x\big(1 - f(x)\big)}.$$

2° $yy'' + y'^2$ étant la dérivée de yy', on aura

$$Lyy' = \int \frac{dx}{x(1 - f)} + Lc$$

$$yy' = ce^{\int \frac{dx}{x(1-f)}}$$

$$y^2 = 2c \int e^{\int \frac{dx}{x(1-f)}} dx.$$

3° Si $f(x) = K$,

$$\int \frac{dx}{x(1-K)} = \frac{1}{1-K} Lx$$

$$yy' = cx^{\frac{1}{1-K}}, \qquad y^2 = c_1 x^{\frac{2-K}{1-K}} + c_2$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.

Si $f(x) = \frac{K}{x}$,

$$Lyy' = L(x-K) + Lc, \qquad yy' = c(x-K),$$
$$y^2 = c(x-K)^2 + c_1$$

la courbe est une conique de centre $x = K$, $y = 0$, ox étant un axe. La droite PC passe par le centre.

Si $f(x) = x$, on a

$$Lyy' = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = L\frac{x}{1-x} + LC$$

$$yy' = C\frac{x}{1-x} = C\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$$

$$y^2 = 2C\left(-x - L(1-x)\right) + C'$$

135. Les cercles de rayon R, qui passent par O, sont représentés par l'équation :

$$(x - R\cos t)^2 + (y - R\sin t)^2 = R^2$$

où t a une valeur constante, arbitraire. Un point de ce cercle peut se représenter par :

$$x = R(\cos t + \cos\theta), \qquad y = R(\sin t + \sin\theta)$$

où θ est un paramètre arbitraire. A chaque valeur de t correspond un cercle. Sur ce cercle, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}.$$

Si t et θ sont variables, x et y représentent un point du plan, qui n'est réel que dans le cercle de centre O, et de rayon 2R. Si on établit une relation entre t et θ, ce point décrira une courbe. Cette courbe coupera le cercle, qui passe au même point, à angle droit, si l'on a :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos t dt + \cos\theta d\theta}{-\sin t dt - \sin\theta d\theta}$$

$$(\cos t\,dt + \cos\theta d\theta)\cos\theta + (\sin t dt + \sin\theta d\theta)\sin\theta = 0$$

$$d\theta + \cos(t-\theta)dt = 0$$

$$d(t-\theta) = \big(1 + \cos(t-\theta)\big)dt = 2\cos^2\frac{t-\theta}{2}\,dt$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{t-\theta}{2} + C.$$

Si on pose

$$\frac{t-\theta}{2} = u,$$

on a :

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = 2R^2\big(1 + \cos(t-\theta)\big) = 4R^2\cos^2 u$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x} = \frac{\sin t + \sin\theta}{\cos t + \cos\theta} = \operatorname{tg}\frac{t+\theta}{2} = \operatorname{tg}(t-u).$$

On peut représenter ces courbes, en coordonnées polaires, par les équations :

$$\rho = 2R\cos u, \qquad \omega = \operatorname{tg} u - u + C.$$

Lorsque la constante C varie, la courbe tourne autour de l'origine. En choisissant l'axe, on peut supposer $C = 0$; si u augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ diminue de $2R$ à 0, ω augmente de 0 à ∞, l'origine est un point asymptotique. De $-\frac{\pi}{2}$ à 0, on a une portion de courbe symétrique par rapport à ox. Si u augmente de π, ω diminue de π, on a une courbe symétrique par rapport à l'origine. Si ω augmente de 2π, on retrouve les mêmes points.

136. La droite D a pour équation

$$Y = (X - x)y',$$

son enveloppe s'obtient en prenant la dérivée par rapport au paramètre variable x :

$$(X - x)y'' - y' = 0.$$

Le point de contact N, de D avec son enveloppe, a pour coordonnées :

$$X = x + \frac{y'}{y''}, \qquad Y = \frac{y'^2}{y''}.$$

2° L'ordonnée du centre de courbure en M est :

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

La courbe C devra vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{y'^2}{y''} = \frac{2}{3}\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''}\right)$$

$$\frac{2y'y''}{y'^2 - 2} = \frac{y'}{y}, \qquad y = \frac{c}{2}(y'^2 - 2)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y + c}} = \sqrt{\frac{2}{c}}\, dx, \qquad \sqrt{y + c} = \frac{x + c'}{\sqrt{2c}}$$

$$(x + c')^2 = 2c(y + c).$$

Parabole, dont la tangente au sommet, $y + c = 0$, est symétrique de l'axe ox par rapport au foyer $\left(-c', -\frac{c}{2}\right)$.

137. La tangente et la normale ont pour équations :

$$Y - y = y'(X - x), \qquad (Y - y)y' + X - x = 0$$

elles coupent OX aux points d'abscisses

$$X = OT = x - \frac{y}{y'}, \qquad X = ON = x + yy'$$

on a l'équation différentielle

$$(x + yy')\left(x - \frac{y}{y'}\right) = K^2.$$

Si on considérait y^2 comme fonction de la variable $x^2 = t$, on aurait une équation du premier degré entre x^2 et y^2

$$\left(1 + \frac{d(y^2)}{d(x^2)}\right)\left(x^2 - y^2\frac{d(x^2)}{d(y^2)}\right) = K^2$$

c'est une équation de Lagrange, qu'on doit différentier. Mais il est alors plus simple de différentier la première équation, ce qui donne :

$$(1 + y'^2 + yy'')\left(x - \frac{y}{y'}\right) + (x + yy')\frac{yy''}{y'^2} = 0$$

$$(1 + y'^2)\left(x - \frac{y}{y'} + xy\frac{y''}{y'^2}\right) = 0$$

$$\frac{xy''}{xy' - y} + \frac{y'}{y} = 0$$

dont l'intégrale donne :

$$L(xy' - y) + Ly = Lc, \qquad xy' = y + \frac{c}{y}.$$

En remplaçant y' par cette valeur dans la première équation, on a sa solution générale

$$x^2 + y^2 + c = \frac{K^2}{c}(y^2 + c).$$

L'équation différentielle de ces coniques peut s'écrire :

$$y'^2 + y'\frac{x^2 - y^2 - K^2}{xy} - 1 = 0.$$

Elle ne change pas si on change y' en $\frac{-1}{y'}$, les trajectoires orthogonales sont les mêmes courbes. En chaque point (x_0, y_0) passent deux de ces courbes, qui sont des ellipses et des hyperboles ayant les mêmes foyers fixes $y = 0$, $x = \pm K$, et qui sont orthogonales. Les deux valeurs de c sont données par l'équation

$$c^2 + c(x_0^2 + y_0^2 - K^2) - K^2 y_0^2 = 0.$$

L'une $c = -a$, comprise entre $-\infty$ et 0, donne une ellipse. L'autre $c = b$, entre 0 et K^2, donne une hyperbole. Et l'on aura $K^2 y_0^2 = ab$. Une parallèle à ox coupe les arcs de courbe qui se coupent en $x_0 y_0$ aux points

$$x_1 = \sqrt{(a - y^2)\left(\frac{K^2}{a} + 1\right)}, \qquad x_2 = \sqrt{(y^2 + b)\left(\frac{K^2}{b} - 1\right)}.$$

On a l'aire

$$A = 2\int_0^{y_0}(x_1 - x_2)dy$$

$$2\int_0^y \sqrt{a - y^2}\,dy = \int_0^y \frac{a - 2y^2}{\sqrt{a - y^2}}dy + a\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a - y^2}} = y\sqrt{a - y^2} + a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a}}$$

$$2\int_0^y \sqrt{b + y^2}\,dy = \int_0^y \frac{b + 2y^2 + b}{\sqrt{b + y^2}}dy = y\sqrt{b + y^2} + b\,L\frac{y + \sqrt{y^2 + b}}{\sqrt{b}}$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{K^2}{a}}\left(y\sqrt{a - y^2} + a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a}}\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{K^2}{b} - 1}\left(y\sqrt{b + y^2} + b\,L\frac{y + \sqrt{b + y^2}}{\sqrt{b}}\right)$$

où $y = \frac{\sqrt{ab}}{K}$, A se réduit à

$$A = \sqrt{a(a + K^2)} \arcsin\sqrt{\frac{b}{K^2}} - \sqrt{b(K^2 - b)}\,L\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + K^2}}{K}.$$

138. On peut choisir o pour origine, la droite D ayant pour équation $x + a = 0$. La distance de o à la tangente

$$Y - y = y'(X - x)$$

est $\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}$. On a l'équation différentielle

$$y - xy' = (x + a)\sqrt{1 + y'^2}$$

c'est une équation de Lagrange, du premier degré entre x et y, que l'on intègre en prenant d'abord la dérivée :

$$\frac{dy'}{dx}\left(x + y'\frac{x + a}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) + \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Si on considère x comme fonction de la variable y', c'est une équation linéaire

$$\frac{dx}{dy'} + x\frac{y' + \sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'^2} + \frac{ay'}{1 + y'^2} = 0.$$

En supposant d'abord a nul, on est conduit à poser :

$$x(y' + \sqrt{1 + y'^2})\sqrt{1 + y'^2} = u$$

$$\frac{du}{dy'} = -a\left(y' + \frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)$$

$$u = -\frac{a}{2}\left[y'^2 + y'\sqrt{1 + y'^2} - \mathrm{L}\,\frac{(y' + \sqrt{1 + y'^2})}{c}\right]$$

$$x = -\frac{a}{2}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2} - y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\mathrm{L}\,\frac{(y' + \sqrt{1 + y'^2})}{c}\right].$$

L'équation différentielle donne

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{y'^2 + 2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y' + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\mathrm{L}\,\frac{(y' + \sqrt{1 + y'^2})}{c}\right]$$

ces équations donnent x et y en fonction du paramètre y', $\sqrt{1 + y'^2}$ peut être changé de signe, c étant alors négatif.

Les coefficients angulaires des tangentes aux courbes passant par un point $A(x, y)$ sont les racines de l'équation :

$$y'^2(a^2 + 2ax) + 2y'xy + (x + a)^2 - y^2 = 0$$

elles sont confondues si

$$x^2y^2 = (a^2 + 2ax)\left((x + a)^2 - y^2\right)$$

ou

$$(x+a)^2(y^2-2ax-a^2)=0.$$

Si le point A est sur la parabole

$$y^2=2ax+a^2$$

on a

$$y'=-\frac{xy}{a^2+2ax}=-\frac{x}{y}.$$

Comme on a toujours

$$y^2>2ax+a^2,$$

A est un point de rebroussement. La valeur de c, qui donne la courbe passant par A se déduit des expressions $y'=-\frac{x}{y}$,

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{y-xy'}{x+a}=\frac{y^2+x^2}{y(x+a)}=\frac{x+a}{y}$$

$$x=a\mathrm{L}\frac{a}{cy},\qquad \mathrm{L}c=\mathrm{L}\frac{a}{y}-\frac{x}{a}.$$

On peut vérifier que $\frac{dx}{dy'}$ et $\frac{dy}{dy'}$ s'annulent en ce point, qui est un point de rebroussement. Une seule courbe passe par A.

Au point $x=-a$, y, les deux valeurs de y' sont égales $y'=\frac{y}{x}$; mais $\frac{y-xy'}{x+a}$ étant indéterminé

$$\sqrt{1+y'^2}=\pm\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

a deux valeurs, il y a deux courbes passant par ce point A, ces courbes ont même tangente en A, qui n'est pas un point singulier, $\frac{dx}{dy'}$ et $\frac{dy}{dy'}$ prennent les valeurs

$$\frac{-x}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}\qquad\text{et}\qquad\frac{-y}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}.$$

139. L'enveloppe des courbes $f(x, y, \alpha)=0$ est déterminée par les équations :

$$f(x, y, \alpha)=0,\qquad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0$$

où y et α sont des fonctions de x. En un point de l'enveloppe x, y α ont des valeurs déterminées. Sur la courbe qui passe en ce

point, α a la même valeur, mais reste constant sur cette courbe, on a alors

$$f'_x + y'f'_y = 0, \qquad f''_{x^2} + 2y'f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} + y''f'_y = 0.$$

Sur la courbe enveloppe α est fonction de x, la première équation donne :

$$f'_x + y'f'_y + \alpha' f'_\alpha = 0$$

mais, en tenant compte de la seconde, il reste

$$f'_x + y'f'_y = 0$$

et

$$f''_{x^2} + 2y'f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} + y''f'_y + \alpha'(f''_{x\alpha} + y'f''_{y\alpha}) = 0$$

au point considéré, x, y et α ont la même valeur sur les deux courbes, y' a aussi la même valeur, les deux courbes sont tangentes. Pour que le contact soit du second ordre il faut que y'' ait aussi la même valeur, ce qui donne

$$\alpha'(f''_{x\alpha} + y'f''_{y\alpha}) = 0$$

cette équation détermine les points où le contact est du second ordre. Cela aura lieu pour tous les points de l'enveloppe, si cette équation devient une identé, et comme α ne peut pas être constant, il faudra que l'on ait, en éliminant y' :

$$f = 0, \qquad f'_\alpha = 0, \qquad f''_{x\alpha} f'_y = f''_{y\alpha} f'_x$$

pour tout point de l'enveloppe, c'est-à-dire que ces trois équations doivent se réduire à 2, ou que, si on exprime x et y en fonction de α, la troisième équation doit devenir une identité.

Pour les courbes données, l'enveloppe sera définie par les deux équations :

$$\alpha^{2\sqrt{2}} + 2y\alpha^{\sqrt{2}} - 2\alpha^{\sqrt{2}+1} - 4x\alpha^{\sqrt{2}-1} + 4x - y^2 = 0$$

$$\sqrt{2}\,\alpha^{2\sqrt{2}-1} + \sqrt{2}\,y\alpha^{\sqrt{2}-1} - (\sqrt{2}+1)\alpha^{\sqrt{2}} - 2x(\sqrt{2}-1)\alpha^{\sqrt{2}-2} = 0.$$

La seconde donne :

$$x = (\sqrt{2}+1)\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left[y + \alpha^{\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)\right]$$

et, en portant cette valeur de x dans la première équation, on a :

$$y^2 + 2y(1+\sqrt{2})(\alpha^{\sqrt{2}} - \alpha\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2(\alpha^{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\,\alpha^{1+\sqrt{2}} + 2\alpha^2) = 0$$

ou

$$[y + (1 + \sqrt{2})(\alpha^{\sqrt{2}} - \alpha\sqrt{2})]^2 = 0.$$

La courbe enveloppe est représentée par les équations :

$$y = (1 + \sqrt{2})\left(\alpha\sqrt{2} - \alpha^{\sqrt{2}}\right), \qquad x = (1 + \sqrt{2})\alpha\left(\alpha\frac{1 + \sqrt{2}}{2} - \alpha^{\sqrt{2}}\right).$$

On a :

$$f(x, y, \alpha) = \left(y - \alpha^{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(1 - \alpha^{\sqrt{2}-1}\right)\left(2x - \alpha^{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$f'_y = 2\left(y - \alpha^{\sqrt{2}}\right)$$

$$f'_x = 4\left(\alpha^{\sqrt{2}-1} - 1\right)$$

$$\frac{f'_y}{f''_{y\alpha}} - \frac{f'_x}{f''_{x\alpha}} = \frac{y - \alpha^{\sqrt{2}}}{-\sqrt{2}\,\alpha^{\sqrt{2}-1}} - \frac{\alpha^{\sqrt{2}-1} - 1}{(\sqrt{2} - 1)\alpha^{\sqrt{2}-2}}$$

$$f''_{x\alpha} f'_y - f''_{y\alpha} f'_y = 8a^{\sqrt{2}-2}\left[(\sqrt{2} - 1)y + \alpha^{\sqrt{2}} - \alpha\sqrt{2}\right].$$

Expression qui est nulle en tout point de la courbe enveloppe.

140. Le rayon vecteur forme avec la tangente un angle v donné par la relation $\operatorname{tg} v = \frac{\rho}{\rho'}$. La tangente coupe la perpendiculaire OT au rayon vecteur en un point T, $\mathrm{OT} = \rho \operatorname{tg} v = \frac{\rho^2}{\rho'}$. La normale coupe TO au point N,

$$\mathrm{ON} = \rho \operatorname{cotg} v = \rho', \qquad \mathrm{NT} = \mathrm{OT} + \mathrm{ON} = \rho' + \frac{\rho^2}{\rho'}.$$

On a :

$$\frac{2}{a}\rho^2 = \rho' + \frac{\rho^2}{\rho'}$$

$$\rho'^2 - \frac{2}{a}\rho^2\rho' + \rho^2 = 0$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\rho^2}{a} \pm \frac{\rho}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

$$d\omega = \frac{a\,d\rho}{\rho\left(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - a^2}\right)} = \frac{\rho \mp \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a\rho}\,d\rho = \left(1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \mp \frac{a^2}{\rho^2\sqrt{1 - \frac{a^2}{\rho^2}}}\right)\frac{d\rho}{a}$$

$$\omega = \frac{\rho}{a} \pm \left(\frac{1}{a}\sqrt{\rho^2 - a^2} + \operatorname{arc\,sin}\frac{a}{\rho}\right) + c.$$

En choisissant la direction de l'axe, on peut supposer $c = 0$. On peut représenter cette courbe par les équations :

$$\rho = \frac{a}{\sin t}, \qquad \omega = \frac{1 \pm (\cos t + t \sin t)}{\sin t}.$$

Supposons qu'on prenne le signe $+$, et qu'on change t en $\pi - t$, ρ ne change pas, et ω devient :

$$\omega = \frac{1 - \cos t + (\pi - t) \sin t}{\sin t} = \pi + \frac{1 - (\cos t + t \sin t)}{\sin t}.$$

De sorte que, en faisant tourner l'axe de l'angle π, on retrouve la courbe qui correspond au signe $-$.

Ces courbes sont donc représentées par les équations

$$\rho = \frac{a}{\sin t}, \qquad \omega = t + \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{-\cos t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{\rho d\omega}{d\rho} = \frac{\sin t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}, \qquad v = \frac{\pi - t}{2}.$$

L'arc s de courbe est donné par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt^2 + \frac{a^2 \cos^2 t}{4 \sin^2 t \sin^4 \frac{t}{2}} dt^2$$

$$ds = \frac{a \cos t dt}{\sin^2 t} \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \frac{t}{2}} = a \frac{\cos t}{4 \sin^3 \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$= \frac{a \sin \frac{t}{2} dt}{4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{t}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \right) =$$

$$= \frac{a}{4} \left(\frac{1}{4\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(1 + \cos \frac{t}{2}\right)^2} - \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right) \sin \frac{t}{2} dt$$

$$s = \frac{a}{8} \left(\frac{1}{1 + \cos \frac{t}{2}} - \frac{1}{1 - \cos \frac{t}{2}} - \frac{4}{\cos \frac{t}{2}} - 2 \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{t}{4} \right) + c$$

$$= -\frac{a}{4} \left(\frac{3 - \cos t}{\sin t \sin \frac{t}{2}} + \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{t}{4} \right) + c.$$

Pour construire la courbe, il suffit de faire varier t de o à π, car en augmentant t de 2π, on retrouve les mêmes points ; et, en changeant t en $-t$, ρ et ω changent de signe, on a des points symétriques par rapport à oy. Si t varie de $\frac{\pi}{2}$ à π, ρ augmente de a à ∞, et ω augmente de $\frac{\pi}{2}+1$ à π. Pour déterminer l'asymptote, il faut chercher la limite de

$$\rho \sin(\omega - \pi) = \frac{-a}{\sin t} \sin\left(t + \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right)$$

pour $t = \pi$ cette expression se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et a la même limite que

$$-\frac{a}{\cos t}\cos\left(t + \operatorname{cotg}\frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{-a}{2}.$$

Il en résulte que l'asymptote est la droite dont l'équation est $y = \frac{a}{2}$. Comme

$$\frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}\,1{,}637 < \frac{5\pi}{6},$$

le point $\omega = 1 + \frac{\pi}{2}$, $\rho = a$ est au-dessus de cette asymptote ; en ce point $v = \frac{\pi}{4}$, et l'on a une branche infinie allant de ce point vers la gauche de l'asymptote, pour $\omega = \pi$.

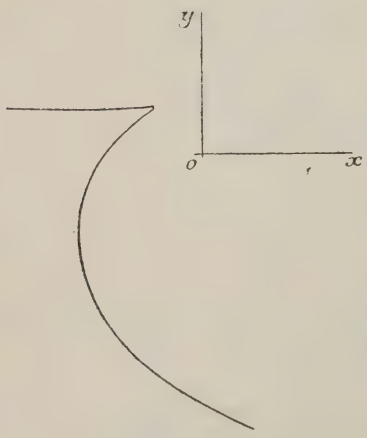


Fig. 13

Si t décroît de $\frac{\pi}{2}$ à 0, ρ et ω augmentent indéfiniment, et cette partie de la courbe a une forme de spirale (*fig.* 13).

141. L'enveloppe de la droite mobile est déterminée par les deux équations :

$$\begin{cases} x \sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha) \\ x\cos\alpha + y\sin a = f'(\alpha) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha \\ y = -f(\alpha)\cos\alpha + f'(\alpha)\sin\alpha. \end{cases}$$

Pour calculer le rayon de courbure R de la courbe définie par ces équations, on a, en prenant les dérivées par rapport au paramètre α :

$$x' = \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)\cos\alpha, \qquad y' = \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)\sin\alpha$$

$$x'' = \big(f'(\alpha) + f'''(\alpha)\big)\cos\alpha - \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)\sin\alpha$$

$$y'' = \big(f'(\alpha) + f'''(\alpha)\big)\sin\alpha + \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)\cos\alpha$$

$$x'^2 + y'^2 = \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)^2$$

$$x'y'' - y'x'' = \big(f(\alpha) + f''(\alpha)\big)^2$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''} = f(\alpha) + f''(\alpha)$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{f(\alpha)^2 + f'(\alpha)^2}.$$

On a l'équation différentielle

$$f(\alpha) + f''(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)^2 + f'(\alpha)^2}.$$

Si on changeait le signe du radical, cela reviendrait à changer le signe de f, ou de x et y ; ce qui correspond à un changement de direction des axes.

Pour intégrer cette équation, posons :

$$f'(\alpha) = f(\alpha)u$$

on aura

$$f + uf' + fu' = f\sqrt{1 + u^2}$$

et, en remplaçant f' par fu et divisant par f :

$$1 + u^2 + \frac{du}{d\alpha} = \sqrt{1 + u^2}$$

$$d\alpha = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2} - 1 - u^2} = du\,\frac{1 + u^2 + \sqrt{1 + u^2}}{-u^2(1 + u^2)}$$

$$-d\alpha = \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}}\right)du$$

$$\alpha = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} + c$$

$$u = 2\,\frac{\alpha - c}{(\alpha - c)^2 - 1}.$$

Cette équation définit la fonction u de α, et l'on a :

$$\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = u, \qquad \mathrm{L}f(\alpha) = \int u d\alpha = \mathrm{L}[(\alpha - c)^2 - 1]$$

$$f = c'[(\alpha - c)^2 - 1].$$

On peut ainsi obtenir l'équation de la droite mobile en fonction du paramètre α.

142. Entre les coordonnées x, y du centre d'homothétie P, X, Y d'un point M, et X_1 Y_1 du point homothétique, on a les relations :

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PM}_1} = \frac{\mathrm{X} - x}{\mathrm{X}_1 - x} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\mathrm{Y}_1 - y} = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{X} = x(1 - \mathrm{K}) + \mathrm{K}\mathrm{X}_1, \qquad \mathrm{Y} = y(1 - \mathrm{K}) + \mathrm{K}\mathrm{Y}_1$$

x, y, K sont des fonctions d'un paramètre t. Si le point X, Y décrit la courbe $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$, la courbe homothétique a pour équation :

$$y(1 - \mathrm{K}) + \mathrm{K}\mathrm{Y} - \varphi(x(1 - \mathrm{K}) + \mathrm{K}\mathrm{X}) = 0$$

à chaque valeur de t, ou de x, y, K, correspond une courbe. Si $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, t)$ est le premier membre de cette équation, on a :

$$f'_{\mathrm{X}} = -\mathrm{K}\varphi', \qquad f'_{\mathrm{Y}} = \mathrm{K}$$

$$f''_{\mathrm{X}t} = -\mathrm{K}'\varphi' - \mathrm{K}[x'(1 - \mathrm{K}) - \mathrm{K}'(x - \mathrm{X})]\varphi'', \qquad f''_{\mathrm{Y}t} = \mathrm{K}'.$$

La courbe aura un contact du second ordre avec son enveloppe, si l'on a :

$$f''_{\mathrm{X}t} f'_{\mathrm{Y}} = f''_{\mathrm{Y}t} f'_{\mathrm{X}}, \quad \text{ou} \quad x'(1 - \mathrm{K}) = \mathrm{K}'(x - \mathrm{X}).$$

Cette relation ayant lieu pour tout point de l'enveloppe, pour laquelle on a :

$$y'(1 - \mathrm{K}) - \mathrm{K}'(y - \mathrm{Y}) = [x'(1 - \mathrm{K}) - \mathrm{K}'(x - \mathrm{X})]\varphi'.$$

On en déduit :

$$\mathrm{X} = x + x' \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K}'}, \qquad \mathrm{Y} = y + y' \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K}'}$$

et

$$y + \mathrm{K} \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K}'} y' = \varphi\left(x + \mathrm{K} \frac{\mathrm{K} - 1}{\mathrm{K}'} x'\right)$$

comme x et y sont des fonctions données de t, c'est une équation différentielle qui détermine la fonction K de t.

En particulier soit

$$Y = \varphi(X) = 2\sqrt{X}, \quad \text{et} \quad 2x = y^2$$

on peut poser

$$y = t, \qquad x = \frac{t^2}{2}.$$

On aura :

$$t + K\frac{K-1}{K'} = \varphi\left(\frac{t^2}{2} + K\frac{K-1}{K'}t\right) = 2\sqrt{\frac{t^2}{2} + K\frac{K-1}{K'}t}$$

$$\left(K\frac{K-1}{K'}\right)^2 - 2Kt\frac{K-1}{K'} - t^2 = 0$$

$$\left(\frac{K't}{K(K-1)}\right) + 2\frac{K't}{K(K-1)} - 1 = 0$$

$$\frac{K't}{K(K-1)} = -1 \pm \sqrt{2}, \qquad (-1 \pm \sqrt{2})\frac{dt}{t} = dK\left(\frac{1}{K-1} - \frac{1}{K}\right)$$

$$\frac{K-1}{K} = ct^{-1\pm\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{K} = 1 - cy^{-1\pm\sqrt{2}}.$$

CHAPITRE VI

—

COURBES ET SURFACES

143. On a :

$$2L(x^2 + y^2) - L(x^2 - y^2) = L\,2a^2$$

$$2\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2}$$

$$(1) \qquad (x^2 - 3y^2)xdx + (3x^2 - y^2)ydy = 0.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$, on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales :

$$(x^2 - 3y^2)xdy - (3x^2 - y^2)ydx = 0.$$

Équation différentielle homogène. Si on pose $y = tx$, elle devient :

$$2\frac{dx}{x} = \frac{1 - 3t^2}{t(1 + t^2)}dt = \left(\frac{1}{t} - \frac{4t}{1 + t^2}\right)dt$$

$$2Lx = Lt - 2L(1 + t^2) + Lc, \qquad x^2(1 + t^2)^2 = ct$$

$$(x^2 + y^2)^2 = cxy.$$

La tangente à la courbe c forme avec OX un angle α, la relation (1) donne :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}\cdot\frac{x^2 - 3y^2}{y^2 - 3x^2} = \frac{\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^3\theta - 3\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{\cos 3\theta}{-\sin 3\theta} = \operatorname{tg}\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha = 3\theta - \frac{\pi}{2}.$$

Le rayon de courbure

$$R = \frac{ds}{d} = \frac{ds}{3d\theta}.$$

En coordonnées polaires, la courbe c a pour équation :

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta, \qquad rdr = -2a^2\sin 2\theta d\theta$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \frac{2a^2}{\cos 2\theta} d\theta^2, \qquad R = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2}{\cos 2\theta}} = \frac{2a^2}{3r}$$

2° $f(\omega) = \frac{(\rho^2 + z^2)^2}{\rho^2 - z^2}$, en prenant les dérivées par rapport à ρ l'équation (1) montre que l'on aura :

$$(\rho^2 - 3z^2)\rho + (3\rho^2 - z^2)z\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0.$$

Les rayons de courbure de la surface $(\rho^2 + z^2)^2 = (\rho^2 - z^2)\, 2a^2$ sont le rayon de courbure de la méridienne, déjà calculé

$$R_1 = \frac{2a^2}{3r} = \frac{2a^2}{3\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

et la normale limitée à l'axe oz,

$$R_2 = \frac{\rho}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{-\cos 3\theta} = \frac{r^3}{3z^2 - \rho^2}.$$

144. x et y étant considérés comme fonctions de z, on a :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 36z^2 + 18^2 z^4 + 1 = (1 + 18z^2)^2$$
$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 36z(1 + 18z^2)$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 36 + 36^2 z^2$$
$$R^2 = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x'x'')^2} = \frac{(1 + 18z^2)^4}{36}$$
$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6z & 18z^2 & 1 \\ 6 & 36z & 0 \\ 0 & 36 & 0 \end{vmatrix} = 6^3$$
$$T = \frac{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x'x'')^2}{D} = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{DR^2} = \frac{(1 + 18z^2)^2}{6}$$

$\frac{R}{T} = 1$ étant constant, la courbe est une hélice.

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\cos\alpha = \frac{6z}{1 + 18z^2}, \qquad \cos\beta = \frac{18z^2}{1 + 18z^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{1 + 18z^2}$$

$\cos\beta + \cos\gamma = 1$, la tangente forme avec la direction

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

un angle égal à 45°. La courbe est une hélice tracée sur le cylindre

$$y - z = 6\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$(y - z)^2 = \frac{x}{3}(2x - 1)^2.$$

145. Les dérivées de x, y, z sont :

$$x' = 2ab, \qquad y' = \frac{a^2}{t}, \qquad z' = 2b^2t$$

$$x'' = 0, \qquad y'' = -\frac{a^2}{t^2}, \qquad z'' = 2b^2.$$

On a :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4a^2b^2 + \frac{a^4}{t^2} + 4b^4t^2 = \left(\frac{a^2}{t} + 2b^2t\right)^2$$

$$ds = \left(\frac{a^2}{t} + 2b^2t\right)dt, \qquad s = a^2\mathrm{L}t + b^2(t^2 - 1)$$

si on suppose $s = 0$, pour $t = 1$.

2° Le plan osculateur a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ 2ab, & \frac{a^2}{t}, & 2b^2t \\ 0, & -\frac{a^2}{t^2}, & 2b^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2abt(X - x) - 2b^2t^2(Y - y) - a^2(Z - z) = 0$$

et le plan normal :

$$(X - x)\,2ab + (Y - y)\frac{a^2}{t} + (Z - z)\,2b^2t = 0$$

a droite, intersection de deux plans normaux infiniment voisins, s'obtient en y joignant l'équation dérivée par rapport à t :

$$-(Y - y)\frac{a^2}{t^2} + (Z - z)\,2b^2 = \left(\frac{a^2}{t} + 2b^2t\right)^2$$

ces trois équations déterminent le centre de courbure, intersection du plan osculateur, et de la caractéristique du plan normal. Elles donnent :

$$\frac{X - x}{a^4 - 4b^4t^4} = \frac{Y - y}{-2abt(a^2 + 2b^2t^2)} = \frac{Z - z}{2abt(a^2 + 2b^2t^2)}$$

ou :

$$\frac{X - x}{a^2 - 2b^2t^2} = \frac{Y - y}{-2abt} = \frac{Z - z}{2abt} = \frac{a^2 + 2b^2t^2}{2abt}.$$

On en déduit le rayon de courbure

$$R = \frac{(a^2 + 2b^2t^2)^2}{2abt}$$

et les coordonnées du centre de courbure :

$$X = 2abt - \frac{2b^3}{a}t^3 + \frac{a^3}{2bt}, \quad Y = a^2Lt - a^2 - 2b^2t^2, \quad Z = a^2 + 3b^2t^2.$$

Le rayon de torsion T peut se déduire de la formule

$$\frac{1}{TR^2} = \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \frac{-8a^3b^3}{t^3\left(\frac{a^2}{t} + 2b^2t\right)^6} = -\frac{1}{R^3}$$

$$T = -R.$$

Il en résulte que la courbe est une hélice. Et, en effet, la tangente forme un angle égal à $\frac{\pi}{4}$, avec la droite dont les équations sont $x = 0$, $y = z$.

3° Soit $d\sigma$ l'arc infiniment petit de la base du cylindre, projection de la courbe sur le plan xoy.

$$d\sigma^2 = (x'^2 + y'^2)dt^2 = a^2(4b^2t^2 + a^2)\frac{dt^2}{t^2}$$

l'aire comprise entre deux génératrices du cylindre, qui correspondent à deux valeurs t_0 et t_1 de t, sera

$$A = \int z d\sigma = \int_{t_0}^{t_1} ab^2\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}\, t dt =$$
$$= \frac{a}{12}\left[(a^2 + 4b^2t_1^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2 + 4b^2t_0^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

146. Les cercles tangents à oz en o, et dont le centre est sur la droite $z = 0$, $x = a$, ont pour équations :

(1) $$ay = \lambda x, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2ax + 2\lambda y$$

où λ est une constante arbitraire. Ces cercles restent sur la surface :

(2) $$x(x^2 + y^2 + z^2) = 2a(x^2 + y^2).$$

Sur le cercle (1), on a :

$$\frac{dx}{az} = \frac{dy}{\lambda z} = \frac{dz}{a^2 + \lambda^2 - ax - \lambda y}.$$

Une courbe tracée sur la surface (2) est orthogonale au cercle (1), si l'on a :

$$azdx + \lambda zdy + (a^2 + \lambda^2 - ax - \lambda y)dz = 0$$

ou, en remplaçant λ et a en fonctions de x, y, z :

$$\frac{dz}{z} = 2\,\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2 - z^2} = 2\,\frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2cz.$$

En tenant compte de (3) l'équation (2) devient

$$cxz = az(2c - z).$$

Les deux surfaces (2) et (3) ont en commun le cercle de rayon nul $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$. Les trajectoires orthogonales déduites des équations (2) et (3) sont ainsi représentées par les équations

$$cx + az = 2ac, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$$

cercles situés dans des plans qui passent par la droite $z = 0$, $x = 2a$, parallèle à oy.

147. La surface S est un hyperboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 = z^2 + \frac{1}{2}.$$

1° En considérant v comme fonction de u, on a :

$$x' = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}}\cos v - \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\sin v \,.\, v'$$

$$y' = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}}\sin v + \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}}\cos v \,.\, v'$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{u^2}{u^2 + \frac{1}{2}} + v'^2\left(u^2 + \frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{3} = \frac{1}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad v'^2 = \frac{u^2 + 1}{\left(u^2 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

si on pose $u = \operatorname{tg} t$

$$\pm v = \int \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2+\frac{1}{2}}\,du = \int \frac{2dt}{\cos t(1+\sin^2 t)} = \int \left(\frac{1}{\cos t} + \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} + \frac{2}{1+\sin^2 t}\right)\frac{d\sin t}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \operatorname{arc\,tg}(\sin t) + c$$

$$\pm v = \mathrm{L}(u+\sqrt{1+u^2}) + \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + c.$$

2° Soit

$$v = c + \mathrm{L}(u+\sqrt{1+u^2}) + \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$v' = \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2+\frac{1}{2}}, \qquad v'' = -u\,\frac{u^2+\frac{3}{2}}{\left(u^2+\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{u^2+1}}$$

$$x'' = \frac{\cos v}{2\left(u^2+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2u\sin v\,.\,v'}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} - \sqrt{u^2+\frac{1}{2}}\,(\cos v.v'^2 + \sin v.v'') =$$

$$= -\frac{\cos v}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} - \frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}\sqrt{u^2+1}}$$

$$y'' = -\frac{\sin v}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} + \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}\sqrt{u^2+1}}$$

$$z'' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 3, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale principale sont proportionnels à

$$x'\sum x'x'' - x''\sum x'^2 = -3x'', \qquad -3y'', \qquad -3z''$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{2}{u^2+1}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{u^2+1}\cos v + u\sin v}{\sqrt{2u^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{-\sqrt{u^2+1}\sin v + u\cos v}{\sqrt{2u^2+1}}, \qquad \cos\gamma = 0.$$

Le plan tangent à la surface S a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - x, & \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}}\cos v, & -\sin v \\ Y - y, & \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}}\sin v, & \cos v \\ Z - z, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$Z\frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}} - X\cos v - Y\sin v = -\frac{1}{2\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}}$$

les cosinus directeurs de la normale sont :

$$-\sqrt{\frac{2u^2+1}{4u^2+1}}\cos v, \qquad -\sqrt{\frac{2u^2+1}{4u^2+1}}\sin v, \qquad \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{4u^2+1}}.$$

Si V est l'angle de cette normale avec la normale principale à la la courbe, on a :

$$\cos V = \sqrt{\frac{u^2+1}{4u^2+1}}.$$

Par le même point (u, v) de S passe une autre courbe c'

$$v = c' - L(u + \sqrt{1+u^2}) - \text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

v' et v'' sont alors changés de signes.

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}}\left(-\cos v + \frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+1}}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}}\left(-\sin v - \frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+1}}\right), \qquad z'' = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{u\sin v - \sqrt{u^2+1}\cos v}{\sqrt{2u^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{-u\cos v - \sqrt{u^2+1}\sin v}{\sqrt{2u^2+1}}, \qquad \cos\gamma = 0$$

cos V à la même valeur.

3° En un point de la courbe c, on a :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 3, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{2}{u^2+1}.$$

Le rayon de courbure R est donné par l'expression :

$$R^2 = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x'x'')^2} = 9\,\frac{u^2+1}{2}.$$

Pour calculer le rayon de torsion T, on a :

$$x''' = \frac{u\cos v}{\left(u^2+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^4 - \frac{1}{2}}{\left(u^2+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\sin v + \frac{\sqrt{u^2+1}\sin v - u\cos v}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}}\sqrt{u^2+1}}v' =$$

$$= \frac{2}{u^2+1}\sqrt{\frac{u^2+\frac{1}{2}}{u^2+1}}\sin v$$

$$y''' = -\frac{2}{u^2+1}\sqrt{\frac{u^2+\frac{1}{2}}{u^2+1}}\cos v$$

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = x''y''' - y''x''' = \frac{2}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$T = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{DR^2} = 3\sqrt{u^2+1}.$$

Les courbes c peuvent se déduire de l'une d'elles, par une rotation autour de oz. Les deux courbes qui passent par un point M sont symétriques par rapport au plan MOZ.

148. Supposons x, y, z fonctions de t, les équations de la tangente à la courbe c sont

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'};$$

la distance de l'origine à cette tangente doit être égale à a

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

ou :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (xdx + ydy + zdz)^2.$$

Pour l'arc s de cette courbe, on a :

$$ds = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}} = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$s = \sqrt{\rho^2 - a^2} - \sqrt{\rho_0^2 - a^2}.$$

L'arc s est la différence des tangentes limitées aux points de contact avec la sphère.

Soient MT, M'T' les tangentes aux points M et M' infiniment voisins, T et T' les points de contact avec la sphère. MT'' une parallèle à M'T', et T'' la projection de O sur cette droite. T'T'' est la distance de M à la tangente M'T'; elle est infiniment petite du second ordre par rapport à l'arc MM'. L'angle de TT' avec TT'' est infiniment petit. Le plan de MT et MT'' a pour limite le plan tangent en T à la sphère, qui est le plan osculateur en M, limite du plan passant par MT parallèle à M'T'.

Si la courbe c est sur le cylindre $x^2 + y^2 = b^2$, en posant

$$x = b \cos \omega, \qquad y = b \sin \omega,$$

on a :

$$(z^2 + b^2 - a^2)b^2 d\omega^2 = (a^2 - b^2)dz^2, \qquad b < a$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,\omega = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + b^2 - a^2}} = \mathrm{L}(z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}) - \mathrm{L}c$$

$$z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2} = ce^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}}$$

$$-z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2} = \frac{b^2 - a^2}{c}\, e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}}$$

$$z = \frac{c}{2}\, e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}} + \frac{a^2 - b^2}{2c}\, e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}}.$$

En faisant tourner les axes autour de oz, on peut choisir la valeur de c. Supposons

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}} + e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2 - b^2}}}\right)$$

x, y, z sont des fonctions de ω, le plan osculateur à cette courbe a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X-x, & -b\sin\omega, & -\cos\omega \\ Y-y, & b\cos\omega, & -\sin\omega \\ Z-z, & \frac{b}{2}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}-e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right), & \frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}+e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$2Z + (X\sin\omega - Y\cos\omega)\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} - e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right) +$$

$$+ (X\cos\omega + Y\sin\omega)\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} + e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} + e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right)$$

on a :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{b^2}{a^2-b^2}z^2,$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{b^3}{4\sqrt{a^2-b^2}}\left(e^{\frac{2b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} - e^{-\frac{2b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right),$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = b^2 + \frac{b^4}{4(a^2-b^2)}\left(e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} + e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{\Sigma x'^2\Sigma x''^2 - (\Sigma x'x'')^2} = \frac{\left(\frac{b^2z^2}{a^2-b^2}\right)^3}{\frac{b^4z^2}{a^2-b^2} + \frac{b^6z^2}{(a^2-b^2)^2}} = \frac{b^2z^4}{(a^2-b^2)a^2}$$

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = b^2\begin{vmatrix} -\sin\omega & \cos\omega & z' \\ -\cos\omega & -\sin\omega & z'' \\ \sin\omega & -\cos\omega & z''' \end{vmatrix} =$$

$$= b^2(z' + z''') = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}z'$$

$$T = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{DR^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{z^2}{z^4} = \frac{b}{2}\,\frac{2 + e^{\frac{2b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} + e^{-\frac{2b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}}{e^{\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}} - e^{-\frac{b\omega}{\sqrt{a^2-b^2}}}}.$$

149. Si une courbe est représentée par les équations

$$y = \sin x, \qquad z = f(x).$$

Le plan osculateur a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - x, & 1, & 0 \\ Y - y, & \cos x, & -\sin x \\ Z - z, & z', & z'' \end{vmatrix} = 0$$

$$(X - x)(z'' \cos x + z' \sin x) - (Y - y)z'' - (Z - z) \sin x = 0$$

le plan normal à la courbe a pour équation :

$$(X - x) + (Y - y) \cos x + (Z - z)z' = 0.$$

La normale principale, intersection de ces deux plans, a pour équations :

$$\frac{X - x}{z'z'' - \sin x \cos x} = \frac{Y - y}{z'z'' \cos x + (1 + z'^2) \sin x} = \frac{z - Z}{z' \sin x \cos x + z''(1 + \cos^2 x)}$$

elle est parallèle au plan yoz si

$$z'z'' = \sin x \cos x$$
$$z'^2 = \sin^2 x + c.$$

2° Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\frac{1}{\sqrt{2 + c}}, \qquad \frac{\cos x}{\sqrt{2 + c}}, \qquad \sqrt{\frac{\sin^2 x + c}{2 + c}}$$

elle forme avec ox un angle constant.

Pour une courbe quelconque, si y et z sont des fonctions de x, le plan normal

$$X - x + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$

et le plan osculateur

$$(X - x)(y'z'' - z'y'') - (Y - y)z'' + (Z - z)y'' = 0$$

ont leur intersection parallèle au plan yoz, si l'on a

$$\frac{y'}{-z''} = \frac{z'}{y''}, \qquad y'y'' + z'z'' = 0, \qquad y'^2 + z'^2 = c,$$

la tangente fait un angle constant avec ox ; c'est une propriété de toute hélice.

3° La tangente forme un angle de 45° avec ox pour la courbe

$$y = \sin x, \qquad z = f(x)$$

si

$$c = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = \sin x, \qquad z = -\cos x + c'.$$

En choisissant l'origine, on aura

$$z = -\cos x, \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

La courbe est une hélice tracée sur un cylindre de révolution, de rayon 1.

150. Si oz est l'axe du cône, on peut représenter un point du cône par les formules :

$$x = \rho \cos \omega \sin \alpha, \qquad y = \rho \sin \omega \sin \alpha, \qquad z = \rho \cos \alpha$$

où α est constant, c'est l'angle des génératrices avec oz, ρ et ω sont variables. Si ρ est fonction de ω, ce point décrit une courbe, les cosinus directeurs de sa tangente sont

$$\frac{\rho' \cos \omega - \rho \sin \omega}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha}} \sin \alpha, \qquad \frac{\rho' \sin \omega + \rho \cos \omega}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha}} \sin \alpha, \qquad \frac{\rho' \cos \alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Ceux de la génératrice qui passe par le point de contact sont :

$$\cos \omega \sin \alpha, \qquad \sin \omega \sin \alpha, \qquad \cos \alpha.$$

Si β est l'angle de ces deux droites, on a

$$\cos \beta = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha}}, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} = a$$

a est constant,

$$\rho = ce^{a\omega}.$$

Si on augmente ω d'une constante, la courbe tournant autour de oz, la constante c est changée, et on peut la supposer égale à 1, on a la courbe :

$$x = e^{a\omega} \cos \omega \sin \alpha, \qquad y = e^{a\omega} \sin \omega \sin \alpha, \qquad z = e^{a\omega} \cos \alpha$$

$$x' = e^{a\omega} \sin \alpha (a \cos \omega - \sin \omega), \qquad y' = e^{a\omega} \sin \alpha (a \sin \omega + \cos \omega)$$

$$z' = e^{a\omega} a \cos \alpha, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = e^{2a\omega}(a^2 + \sin^2 \alpha)$$

$$x'' = e^{a\omega} \sin \alpha (a^2 \cos \omega - 2a \sin \omega - \cos \omega)$$

$$y'' = e^{a\omega} \sin \alpha (a^2 \sin \omega + 2a \cos \omega - \sin \omega)$$

$$z'' = e^{a\omega} a^2 \cos \alpha, \qquad x''^2 + y''^2 + z''^2 = e^{2a\omega}\left(a^4 + (2a^2 + 1) \sin^2 \alpha\right)$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = ae^{2a\omega}(a^2 + \sin^2 \alpha).$$

Le centre de courbure (X, Y, Z) est donné par les formules :

$$\frac{X-x}{x'\Sigma x'x''-x''\Sigma x'^2}=\frac{Y-y}{y'\Sigma x'x''-y''\Sigma x'^2}=\frac{Z-z}{z'\Sigma x'x''-z''\Sigma x'^2}=$$

$$=\frac{\Sigma x'^2}{(\Sigma x'x'')^2-\Sigma x'^2\Sigma x''^2}$$

$$\frac{X-x}{a\sin\omega+\cos\omega}=\frac{Y-y}{\sin\omega-a\cos\omega}=\frac{Z-z}{0}=-\frac{a^2+\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{e^{a\omega}}{1+a^2}$$

$$X=-\frac{ae^{a\omega}}{(1+a^2)\sin\alpha}\left[a\cos\omega\cos^2\alpha+(a^2+\sin^2\alpha)\sin\omega\right]$$

$$Y=-\frac{ae^{a\omega}}{(1+a^2)\sin\alpha}\left[a\sin\omega\cos^2\alpha-(a^2+\sin^2\alpha)\cos\omega\right]$$

$$Z=e^{a\omega}\cos\alpha.$$

On en déduit :

$$X'=-\frac{ae^{a\omega}}{(1+a^2)\sin\alpha}\left[(a^2+a^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cos\omega+a(a^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\sin\omega\right]$$

$$Y'=-\frac{ae^{a\omega}}{(1+a^2)\sin\alpha}\left[(a^2+a^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\sin\omega-a(a^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\cos\omega\right]$$

$$Z'=ae^{a\omega}\cos\alpha$$

$$(X'\cos\omega+Y'\sin\omega)\sin\alpha=-a\,\frac{a^2+a^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{1+a^2}\cdot e^{a\omega}$$

$$(-X'\sin\omega+Y'\cos\omega)\sin\alpha=\frac{a^2}{1+a^2}(a^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)e^{a\omega}$$

$$X'x'+Y'y'+Z'z'=0$$

ce qui montre que les tangentes aux courbes S et S_1 sont perpendiculaires.

2° Posons

$$R^2=X^2+Y^2+Z^2=\frac{a^2e^{2a\omega}}{(1+a^2)\sin^2\alpha}(a^2+\sin^4\alpha)+e^{2a\omega}\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{e^{2a\omega}}{(1+a^2)\sin^2\alpha}(a^4+a^2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$$

et

$$\frac{a\cos^2\alpha}{\sqrt{(1+a^2)(a^2+\sin^4\alpha)}}=\cos\gamma,\qquad\frac{a^2+\sin^2\alpha}{\sqrt{(1+a^2)(a^2+\sin^4\alpha)}}=\sin\gamma.$$

Les équations de la courbe S_1 peuvent s'écrire :

$$X = -Ra\sqrt{\frac{a^2 + \sin^4\alpha}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}}\cos(\omega - \gamma)$$

$$Y = -Ra\sqrt{\frac{a^2 + \sin^4\alpha}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}}\sin(\omega - \gamma)$$

$$Z = R\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{1 + a^2}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}}$$

$$R = \frac{e^{a\omega}}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1 + a^2}}.$$

Si on pose

$$-a\sqrt{\frac{a^2 + \sin^4\alpha}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}} = \sin\alpha',$$

$$\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\frac{1 + a^2}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}} = \cos\alpha'$$

et si on fait tourner les axes de l'angle γ autour de oz, ces équations prennent la forme des équations de la courbe S. Elles représentent également une courbe tracée sur le cône de révolution

$$X^2 + Y^2 = \frac{a^2(a^2 + \sin^4\alpha)}{(1 + a^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}Z^2$$

dont les tangentes forment avec les génératrices un angle constant β' donné par les relations :

$$\sin\alpha'\operatorname{cotg}\beta' = \frac{R'}{R} = a$$

$$\operatorname{tg}^2\beta' = \frac{a^2 + \sin^4\alpha}{a^4 + a^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$$

151. Une sphère passant par le cercle

$$y = tx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2xf(t) = a^2$$

a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xf(t) - a^2 - 2(y - tx)\lambda = 0$$

où λ peut être une fonction de t.

La sphère mobile a, en général, une enveloppe, et les courbes caractéristiques s'obtiennent en prenant l'équation dérivée par rapport à t

$$xf'(t) - x\lambda + (y - tx)\frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Cette équation représente le plan du cercle caractéristique. C'est le plan $y = tx$, si l'on a $\lambda = f'(t)$. On a ainsi les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(f(t) - tf'(t))x - 2f'(t)y = a^2$$

qui passent par les points fixes

$$x = y = 0, \qquad z = \pm a$$

et dont le centre décrit la courbe

$$x = f(t) - tf'(t), \qquad y = f'(t), \qquad z = 0.$$

Dans le cas particulier où f est une fonction linéaire

$$f(t) = at + b, \qquad \lambda = f'(t) = a, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

il n'y a plus d'enveloppe, l'équation de la sphère devient

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2bx - 2ay = a^2$$

elle ne contient plus t et reste fixe.

2° En remplaçant t par $\frac{y}{x}$, on a l'équation de la surface, enveloppe des sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 2xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Sur cette surface on a :

$$xdx + ydy + zdz = f\left(\frac{y}{x}\right)dx + f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy - ydx}{x}.$$

La normale, qui passe par le centre de la sphère, a pour équations :

$$\frac{X - x}{x - f(t) + tf'(t)} = \frac{Y - y}{y - f'(t)} = \frac{Z - z}{z}, \qquad t = \frac{y}{x}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$\begin{vmatrix} x - f + tf', & dx + tf''dt, & dx \\ y - f', & dy - f''dt, & dy \\ z, & dz, & dz \end{vmatrix} = 0$$

qui se ramène à la forme :

$$\begin{vmatrix} x - f(t), & t, & dx \\ y, & -1, & dy \\ z, & 0 & dz \end{vmatrix} dt = 0.$$

L'un des systèmes de lignes de courbure, $t = c$, est formé des cercles caractéristiques, ce que l'on pouvait prévoir, car les normales forment un cône de révolution. Pour l'autre système, on a :

$$z(tdy + dx) = (x + ty - f(t))dz.$$

Mais, pour toute courbe de la surface, on a :

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx + ydy - fdx - xf'dt}{x^2 + y^2 - a^2 - 2xf(t)}.$$

On aura donc :

$$\frac{dz}{z} = \frac{(tdy + dx)x - xdx - ydy + fdx + xf'dt}{(x + ty - f)x - x^2 - y^2 + a^2 + 2xf} = \frac{fdx + xf'dt}{xf + a^2}$$

$$\mathrm{L}z = \mathrm{L}(a^2 + xf(t)) + \mathrm{L}c$$

$$z = c(a^2 + xf(t)).$$

Ces lignes de courbure, qui sont les trajectoires orthogonales des cercles, sont les intersections de la surface avec les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = \frac{2}{c}z.$$

3° On doit avoir, pour la courbe, lieu du centre de la sphère :

$$x = \mathrm{F}(y) = f(t) - tf'(t), \qquad y = f'(t).$$

La fonction $f(t)$ sera déterminée par l'équation de Clairaut :

$$f - t\frac{df}{dt} = \mathrm{F}\left(\frac{df}{dt}\right)$$

dont la solution générale

$$f = ct + \mathrm{F}(c)$$

est une fonction linéaire, qui ne convient pas au problème. La solution singulière, déduite de la relation

$$t + \mathrm{F}'(c) = 0$$

détermine la fonction f. Si $\mathrm{F} = y^2$, on a l'équation

$$f - tf' = f'^2$$

dont la solution singulière, obtenue en exprimant que f' a une racine double, est :

$$f(t) = -\frac{t^2}{4}.$$

On a alors les sphères :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{2}x + ty = a^2$$

et la surface enveloppe

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = -\frac{y^2}{2x}.$$

152. Soit l'hélice

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = aht.$$

Le plan osculateur a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - x, & -\sin t, & -\cos t \\ Y - y, & \cos t, & -\sin t \\ Z - z, & h, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$X\sin t - Y\cos t + \frac{Z}{h} = at$$

Le plan normal est : $-X\sin t + Y\cos t + hZ = ah^2t$.

La normale principale, intersection de ces deux plans, a pour équations :

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t} = \frac{Z - aht}{0}$$

c'est la perpendiculaire à l'axe oz du cylindre, menée par M. L'intersection de deux plans normaux infiniment voisins est donnée par l'équation

$$X\cos t + Y\sin t = -ah^2$$

et coupe le plan osculateur, et la normale principale, au centre de courbure, déterminé par les équations

$$\frac{X - a\cos t}{\cos t} = \frac{Y - a\sin t}{\sin t} = \frac{Z - aht}{0} = -a(1 + h^2).$$

Le rayon de courbure est

$$R = a(1 + h^2).$$

Le rayon de torsion T est donné par la formule

$$T = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{DR^2}$$

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin t, & a\cos t, & ah \\ -a\cos t, & -a\sin t, & 0 \\ a\sin t, & -a\cos t, & 0 \end{vmatrix} = a^3h$$

$$T = a\frac{1 + h^2}{h}.$$

Le point M_1 obtenu en portant la longueur l sur la normale principale, vers l'axe du cylindre, a pour coordonnées :

$$X = (a - l)\cos t, \qquad Y = (a - l)\sin t, \qquad Z = aht$$

l étant constant, ce point décrit une hélice, que l'on déduit de la première en remplaçant a par $a - l$, et h par $\frac{ah}{a - l}$.

1° Les deux hélices S et S_1 ont les rayons de courbure :

$$R = a(1 + h^2), \qquad R_1 = a - l + \frac{a^2h^2}{a - l}.$$

Les courbures, inverses des rayons de courbure, seront égales en valeur absolue, si l'on a $R_1 = \pm R$.

Si $R_1 = R$ on a

$$ah^2 = \frac{a^2h^2}{a - l} - l$$

$$l(l - a + ah^2) = 0$$

$l = 0$ donne deux hélices S et S_1 identiques ; la seule solution est

$$l = a(1 - h^2).$$

Si $R_1 = -R$, on a

$$a(1 + h^2) + \frac{a^2h^2}{a - l} + a - l = 0$$

$$l^2 - a(3 + h^2)l + 2a^2(1 + h^2) = 0$$

$$(l - 2a)(l - a - ah^2) = 0$$

$l = 2a$ donne une hélice égale et symétrique à S par rapport à l'axe oz.

Si $l = a(1 + h^2)$, M_1 est le centre de courbure de S, de même que M est le centre de courbure en M_1 de l'hélice S_1. Cette hélice S_1 est symétrique de la première solution, pour laquelle

$$l = a(1 - h^2).$$

En résumé, on obtient l'hélice S_1 lieu des centres de courbure de S, et deux hélices symétriques de S et S_1 par rapport à oz.

2° Si les torsions sont égales, les rayons de torsion T, inverses des torsions, sont égaux. Pour les deux hélices ces rayons de torsion sont :

$$T = a\left(h + \frac{1}{h}\right), \qquad T_1 = ah + \frac{(a - l)^2}{ah}$$

on doit avoir

$$T = \pm T_1$$

ou

$$a^2 = (a - l)^2 \quad \text{ou} \quad 2ah + \frac{a}{h} + \frac{(a - l)^2}{ah} = 0.$$

La première équation donne $l = 0$ et $l = 2a$, c'est-à-dire l'hélice S et l'hélice symétrique. La seconde équation donne :

$$(a - l)^2 = -a^2(1 + 2h^2)$$

et n'a que des solutions imaginaires.

3° Les cosinus directeurs des tangentes aux deux hélices sont :

$$-\frac{\sin l}{\sqrt{1 + h^2}}, \qquad \frac{\cos l}{\sqrt{1 + h^2}}, \qquad \frac{h}{\sqrt{1 + h^2}}$$

$$-\frac{\sin l}{\sqrt{1 + h_1^2}}, \qquad \frac{\cos l}{\sqrt{1 + h_1^2}}, \qquad \frac{h_1}{\sqrt{1 + h_1^2}}$$

$$h_1 = \frac{ah}{a - l}$$

ces deux tangentes sont perpendiculaires, si l'on a :

$$1 + hh_1 = 0, \qquad l = a(1 + h^2)$$

on retrouve l'hélice S_1, lieu des centres de courbure.

4° La binormale MH est perpendiculaire à la tangente et à la normale principale. Comme les normales principales aux deux hélices coïncident, M_1T_1 est parallèle à MH si elle est perpendiculaire à MT, et on retrouve la question précédente.

153. La tangente a pour équations

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - x^2}{2x} = \frac{Z - \frac{2}{3}x^3}{2x^2}.$$

Le plan osculateur

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - x^2, & Z - \frac{2}{3}x^3 \\ 1, & 2x, & 2x^2 \\ 0, & 1, & 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$2Xx^2 - 2Yx + Z = \frac{2}{3}x^3.$$

Les parallèles aux tangentes, menées par o :

$$X = \frac{Y}{2x} = \frac{Z}{2x^2}$$

engendrent le cône $2XZ = Y^2$.

Le plan, mené par o, parallèle au plan osculateur :

$$2Xx^2 - 2Yx + Z = 0$$

enveloppe le même cône $Y^2 = 2XZ$, c'est la condition pour que les deux valeurs de x soient égales.

2° La bissectrice de l'angle xoz, $x = z$, $y = 0$, forme avec la tangente un angle α, les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\frac{1}{1 + 2x^2}, \quad \frac{2x}{1 + 2x^2}, \quad \frac{2x^2}{1 + 2x^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Il en résulte que la courbe est une hélice située sur le cylindre

$$(x - z)^2 = y(1 - \frac{2}{3}y)^2.$$

3° Sur cette courbe, on a $ds = (1 + 2x^2)dx$; l'arc, compté à partir de l'origine, est :

$$s = x + \frac{2}{3}x^3.$$

Une développante s'obtient en portant sur la tangente, dans la direction de l'arc allant de M à o, une longueur $s + c$. On obtient le point

$$X = x - \frac{1}{1 + 2x^2}(x + \frac{2}{3}x^3 + c) = \frac{\frac{4}{3}x^3 - c}{1 + 2x^2}$$

$$Y = x^2 - \frac{2x}{1 + 2x^2}(x + \frac{2}{3}x^3 + c) = \frac{-x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 2cx}{1 + 2x^2}$$

$$Z = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2x^2}{1 + 2x^2}(x + \frac{2}{3}x^3 + c) = \frac{-\frac{4}{3}x^3 - 2cx^2}{1 + 2x^2}$$

qui décrit une quartique dans le plan $X + Z = -c$.

154. On a :

$$dz = \left(1 + \frac{y^2}{4X^2}\right)X'dx - \frac{ydy}{2X}$$

et, si x et y sont variables indépendantes :

$$d^2z = \left[\left(1 + \frac{y^2}{4X^2}\right)X'' - \frac{y^2X'^2}{2X^3}\right]dx^2 + \frac{yX'}{X^2}dxdy - \frac{dy^2}{2X}$$

au point (x, y) de la surface, l'indicatrice a pour projection, sur le plan xoy, la conique

$$1 = \left[\left(1 + \frac{y^2}{4X^2}\right)X'' - \frac{y^2X'^2}{2X^3}\right]x_1^2 + \frac{yX'}{X^2}x_1y_1 - \frac{y_1^2}{2X}$$

où x_1y_1 sont les coordonnées courantes. Le diamètre conjugué de $y_1 = mx_1$ a pour équation :

$$\left[\left(1 + \frac{y^2}{4X^2}\right)X'' - \frac{y^2X'^2}{2X^3}\right]2x_1 + \frac{yX'}{X^2}y_1 + m\left(\frac{yX'}{X^2}x_1 - \frac{y_1}{X}\right) = 0$$

entre les coefficients angulaires m et m', de deux directions conjuguées, on a la relation :

$$2\left(1 + \frac{y^2}{4X^2}\right)X'' - \frac{y^2X'^2}{X^3} + \frac{yX'}{X^2}(m + m') - \frac{mm'}{X} = 0.$$

Les sections parallèles au plan yoz ont pour projections les droites $x = c$, de coefficient angulaire $m = \infty$, la direction conjuguée est déterminée par $m = \frac{yX'}{X}$. Les courbes c doivent vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yX'}{X}, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{X'dx}{X} = \frac{dX}{X}$$

$$y = cX, \qquad z = y\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{4}\right).$$

Les courbes c se projettent sur le plan yoz suivant des droites passant par l'origine, dont les trajectoires orthogonales sont des cercles de centre o.

155. Une ligne géodésique d'une surface est une courbe dont le plan osculateur reste normal à la surface. Ce sont les courbes qui, en chaque point, ont le plus grand rayon de courbure, parmi celles qui joignent deux points infiniment voisins. Il en résulte que ces courbes forment le plus court chemin d'un point à un autre de la surface.

Sur la surface

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega, \qquad z = f(\rho)$$

on a :

$$dz = f'(\rho)d\rho = f'(\rho)(\cos\omega\, dx + \sin\omega\, dy).$$

La normale a pour équations :

$$\frac{X - x}{f'(\rho)\cos\omega} = \frac{Y - y}{f'(\rho)\sin\omega} = \frac{Z - z}{-1}.$$

Supposons ω fonction de ρ, le point (x, y, z) décrira une courbe sur la surface. Le plan osculateur à cette courbe a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - x, & \cos\omega - \rho\sin\omega.\omega', & -2\sin\omega.\omega' - \rho\sin\omega\,\omega'' - \rho\cos\omega\omega'^2 \\ Y - y, & \sin\omega + \rho\cos\omega.\omega', & 2\cos\omega.\omega' + \rho\cos\omega\,\omega'' - \rho\sin\omega\omega'^2 \\ Z - z, & f'(\rho), & f''(\rho) \end{vmatrix} = 0$$

Ce plan contiendra la normale à la surface, si l'on a :

$$\begin{vmatrix} f'(\rho)\cos\omega, & \cos\omega - \rho\sin\omega.\omega', & -\sin\omega(2\omega' + \rho\omega'') - \rho\cos\omega.\omega'^2 \\ f'(\rho)\sin\omega, & \sin\omega + \rho\cos\omega.\omega', & \cos\omega(2\omega' + \rho\omega'') - \rho\sin\omega.\omega'^2 \\ -1, & f'(\rho), & f''(\rho) \end{vmatrix} = 0$$

$$-\omega''\rho(1 + f'^2) - \rho^2\omega'^3 + \omega'(\rho f' f'' - 2 - 2f'^2) = 0$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\omega'^2}\right)}{d\rho} = \frac{-2\omega''}{\omega'^3} = 2\left(2 - \frac{f' f''}{1 + f'^2}\right)\frac{1}{\omega'^2} + \frac{2\rho}{1 + f'^2}$$

équation linéaire qui détermine $\frac{1}{\omega'^2}$ en fonction de ρ, et s'intègre par quadratures. On est conduit à poser :

$$\frac{1}{\omega'^2} = u\,\frac{\rho^4}{1 + f'(\rho)^2}$$

on aura :

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{2}{\rho^3}, \qquad u = -\frac{1}{\rho^2} + c$$

$$\frac{1}{\omega'^2} = \frac{\rho^2}{1 + f'^2}(c\rho^2 - 1)$$

$$\omega = \int\sqrt{\frac{1 + f'^2}{c\rho^2 - 1}}\,\frac{d\rho}{\rho}$$

156. La tangente a pour équation $Y - y = y'(X - x)$. La distance PQ, du point $P(o, y)$ à cette tangente, est

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \text{on a} \quad \overline{QM}^2 = x^2 - \overline{PQ}^2$$

$$a^2 = x^2 - \frac{x^2 y'^2}{1 + y'^2} = \frac{x^2}{1 + y'^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{2x^2 - a^2}{2a\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a}{2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$y = \frac{x}{2a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a}{2}\,L(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c.$$

Il est inutile de prendre le radical avec le signe —, cela revient à changer le signe de y, ou le sens de l'axe oy.

En choisissant l'origine, on peut supposer $c = 0$.

2° En représentant par oz l'axe de la surface de révolution, on peut la représenter par les équations :

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega$$

$$z = \frac{\rho}{2a}\sqrt{\rho^2 - a^2} - \frac{a}{2}\,\mathrm{L}\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}\right)$$

$$\frac{dz}{d\rho} = \sqrt{\frac{\rho^2}{a^2} - 1}.$$

D'après le problème précédent ses lignes géodésiques seront représentées par l'équation

$$\omega = \int \frac{d\rho}{a\sqrt{c^2\rho^2 - 1}} = \frac{1}{ac}\,\mathrm{L}\left(c\rho + \sqrt{c^2\rho^2 - 1}\right) + c'.$$

157. On a :

$$dx = -l \sin \varphi \cos \theta d\varphi - l \cos \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dy = l \cos \varphi \cos \theta d\varphi - l \sin \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dz = l\left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta\right)d\theta = l\,\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\,d\theta$$

$$\begin{vmatrix} dx, & -\sin \varphi, & -\cos \varphi \cos \theta \\ dy, & \cos \varphi, & -\sin \varphi \cos \theta \\ dz, & 0, & \sin \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos \varphi \sin \theta\, dx + \sin \varphi \sin \theta dy + \cos \theta dz = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\cos \varphi \sin \theta, \qquad \sin \varphi \sin \theta, \qquad \cos \theta.$$

2° Si

$$d\varphi = \frac{\sqrt{c} \sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta \sqrt{l^2 \cos^2 \theta - c}} = \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta \sqrt{\frac{l^2}{c} - \frac{1}{\cos^2 \theta}}}$$

on a :

$$\varphi = c' - \sqrt{\frac{l^2}{c} - \frac{1}{\cos^2 \theta}}$$

sur cette courbe, on a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = l^2(\cos^2 \theta\, d\varphi^2 + \mathrm{tg}^2\, \theta d\theta^2) = \frac{l^4 \sin^2 \theta d\theta^2}{l^2 \cos^2 \theta - c}$$

$$ds = l^2\,\frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{l^2 \cos^2 \theta - c}}, \qquad s = l\mathrm{L}\,\frac{l + \sqrt{l^2 - c}}{l \cos \theta + \sqrt{l^2 \cos^2 \theta - c}}.$$

On peut supposer $c' = 0$, ce qui revient à faire tourner les axes autour de oz. On peut alors poser :

$$\varphi = -\sqrt{\frac{l^2}{c} - \frac{1}{\cos^2\theta}}, \qquad d\varphi = -\frac{\sin\theta d\theta}{\varphi\cos^3\theta}, \qquad ds = -\frac{l^2 \operatorname{tg}\theta d\theta}{\varphi\sqrt{c}}$$

$$dx = -l\sin\theta\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$dy = -l\sin\theta\left(\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\varphi\cos^2\theta}\right)d\theta$$

les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{c}}{l}\left(\varphi\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{c}}{l}\left(\varphi\cos\theta\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = -\frac{\sqrt{c}}{l}\varphi\sin\theta$$

$$d\cos\alpha = \frac{\sqrt{c}}{l}\left(\cos\theta\cos\varphi - \varphi\cos\theta\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)d\varphi -$$

$$-\frac{\sqrt{c}}{l}\left(\varphi\sin\theta\cos\varphi + \frac{\sin\varphi\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{l}\left(-\varphi + \frac{\sin^2\theta}{\varphi\cos^4\theta}\right)\sin\theta\cos\varphi d\theta$$

$$d\cos\beta = -\frac{\sqrt{c}}{l}\left(\cos\theta\sin\varphi + \varphi\cos\theta\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\right)\frac{\sin\theta d\theta}{\varphi\cos^3\theta} +$$

$$+\frac{\sqrt{c}}{l}\left(-\varphi\sin\theta\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\cos^2\theta}\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{l}\left(-\varphi + \frac{\sin^2\theta}{\varphi\cos^4\theta}\right)\sin\theta\sin\varphi d\theta$$

$$d\cos\gamma = -\frac{\sqrt{c}}{l}(\sin\theta d\varphi + \varphi\cos\theta d\theta) = \frac{\sqrt{c}}{l}\left(-\varphi + \frac{\sin^2\theta}{\varphi\cos^4\theta}\right)\cos\theta d\theta.$$

Le rayon de courbure R est donné par la formule

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}{ds^2}$$

$$\frac{1}{R} = \left(\varphi - \frac{\sin^2\theta}{\varphi\cos^4\theta}\right)\frac{c\varphi}{l^3\operatorname{tg}\theta} = \frac{l^2\cos^4\theta - c}{l^3\cos^3\theta\sin\theta}.$$

La normale principale a pour cosinus directeurs

$$R\frac{d^2x}{ds^2} = R\frac{d\cos\alpha}{ds} = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$R\frac{d^2y}{ds^2} = R\frac{d\cos\beta}{ds} = \sin\theta\sin\varphi, \qquad R\frac{d^2z}{ds^2} = \cos\theta.$$

Elle coïncide avec la normale à la surface. Il en résulte que la courbe est une ligne géodésique. Comme elle dépend de deux constantes c et c', elle peut représenter une ligne géodésique quelconque.

158. On a :

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y + mx} = \frac{dx + idy}{(x + iy)(1 + im)}$$

$$L(x + yi) = (1 + mi)Lz + C$$

où C est une constante imaginaire, qui sera égale à

$$C = La - (1 + mi)Lc$$

si la courbe passe par le point (a, o, c)

$$x + yi = a\left(\frac{z}{c}\right)^{1 + mi} = \rho e^{\omega i}$$

ou

$$z = \frac{c}{a}\rho, \qquad z = ce^{\frac{\omega}{m}}, \qquad \rho = ae^{\frac{\omega}{m}}.$$

L'arc de cette courbe est donné par la formule

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + dz^2 = \left(a^2 + \frac{a^2 + c^2}{m^2}\right) e^{\frac{2\omega}{m}} d\omega^2$$

$$s = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 + c^2}{m^2}} \int_0^\omega e^{\frac{\omega}{m}} d\omega = \sqrt{a^2 + c^2 + a^2m^2}\,(e^{\frac{\omega}{m}} - 1).$$

Le centre de gravité de l'arc est déterminé par les formules :

$$X\int_0^s ds = \int xds, \qquad Y\int ds = \int yds, \qquad Z\int ds = \int zds$$

$$X\int_0^\omega e^{\frac{\omega}{m}} d\omega = \int_0^\omega a\cos\omega e^{\frac{2\omega}{m}} d\omega = \frac{am}{4 + m^2}\left[(m\sin\omega + 2\cos\omega)\, e^{\frac{2\omega}{m}}\right]_0^\omega$$

$$X(e^{\frac{\omega}{m}} - 1) = \frac{a}{4 + m^2}\left[m\sin\omega e^{\frac{2\omega}{m}} + 2\cos\omega e^{\frac{2\omega}{m}} - 2\right]$$

$$Y\int_0^\omega e^{\frac{\omega}{m}}d\omega = \int_0^\omega a\sin\omega e^{\frac{2\omega}{m}}d\omega = \frac{am}{4+m^2}\left[(2\sin\omega - m\cos\omega)e^{\frac{2\omega}{m}}\right]_0^\omega$$

$$Y(e^{\frac{\omega}{m}} - 1) = \frac{a}{4+m^2}\left[2\sin\omega e^{\frac{2\omega}{m}} - m\cos\omega e^{\frac{2\omega}{m}} + m\right]$$

$$Z\int_0^\omega e^{\frac{\omega}{m}}d\omega = \int_0^m ce^{\frac{2\omega}{m}}d\omega$$

$$Z(e^{\frac{\omega}{m}} - 1) = \frac{c}{2}(e^{\frac{2\omega}{m}} - 1), \qquad Z = \frac{c}{2}(e^{\frac{\omega}{m}} + 1).$$

Les génératrices du cône de révolution $z = \frac{c}{a}\rho$ forment, avec son axe oz, un angle γ, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\rho}{z} = \frac{a}{c}$. L'aire dA, comprise entre deux génératrices infiniment voisines et un arc de courbe c, a pour projection $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$, donc $dA = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\omega}{\sin\gamma}$

$$A = \frac{2}{a}\sqrt{a^2+c^2}\int_0^\omega e^{\frac{2\omega}{m}}d\omega = \frac{am}{4}\sqrt{a^2+c^2}\,(e^{\frac{2\omega}{m}} - 1).$$

2° La courbe c est donnée par les équations, où ω est un paramètre variable :

$$x = ae^{\frac{\omega}{m}}\cos\omega, \qquad y = ae^{\frac{\omega}{m}}\sin\omega, \qquad z = ce^{\frac{\omega}{m}}$$

$$x' = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{\cos\omega}{m} - \sin\omega\right), \quad y' = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{\sin\omega}{m} + \cos\omega\right), \quad z' = \frac{c}{m}e^{\frac{\omega}{m}}.$$

La tangente forme avec oz un angle γ constant

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{c}\sqrt{1+m^2}$$

$$x'' = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\cos\omega - \frac{2}{m}\sin\omega\right), \quad y'' = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{1-m^2}{m^2}\sin\omega + \frac{2}{m}\cos\omega\right)$$

$$z'' = \frac{c}{m^2}e^{\frac{\omega}{m}}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{c^2 + a^2(1+m^2)}{m^2}e^{\frac{2\omega}{m}}$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{c^2 + a^2(1+m^2)}{m^3}e^{\frac{2\omega}{m}}$$

Les cosinus directeurs de la normale principale sont proportionnels aux expressions :

$$x'\Sigma x'x'' - x''\Sigma x'^2, \qquad y'\Sigma x'x'' - y''\Sigma x'^2, \qquad z'\Sigma x'x'' - z''\Sigma x'^2$$

ou à

$$x' - mx'' = ae^{\frac{\omega}{m}}(\sin\omega + m\cos\omega)$$

$$y' - my'' = ae^{\frac{\omega}{m}}(-\cos\omega + m\sin\omega)$$

$$z' - mz'' = 0.$$

La normale principale est perpendiculaire à oz.

La courbe est une hélice tracée sur le cylindre parallèle à oz, dont la base est la spirale $\rho = ae^{\frac{\omega}{m}}$.

Les lignes géodésiques, qui forment le plus court chemin entre deux points d'une surface, sont caractérisées par la propriété que leur plan osculateur est normal à la surface, ou que la normale principale à la courbe coïncide avec la normale à la surface. La courbe c contient deux constantes arbitraires a et c, m étant supposé donné. On a une surface engendrée par ces courbes, en supposant a variable et $c = \varphi(a)$. On a alors :

$$dx = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{\cos\omega}{m} - \sin\omega\right)d\omega + e^{\frac{\omega}{m}}\cos\omega da$$

$$dy = ae^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{\sin\omega}{m} + \cos\omega\right)d\omega + e^{\frac{\omega}{m}}\sin\omega da$$

$$dz = e^{\frac{\omega}{m}}\left(\frac{c}{m}d\omega + c'da\right)$$

$$\begin{vmatrix} dx, & a(\cos\omega - m\sin\omega), & \cos\omega \\ dy, & a(\sin\omega + m\cos\omega), & \sin\omega \\ dz, & c, & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations de la normale à cette surface sont :

$$\frac{X - x}{(ac' - c)\sin\omega + amc'\cos\omega} = \frac{Y - y}{(c - ac')\cos\omega + amc'\sin\omega} = \frac{Z - z}{-am}.$$

Elle ne peut pas coïncider avec la normale principale à la courbe c, qui est perpendiculaire à oz.

3° Si le point M_0 décrit la droite

$$z = px + q,$$

c et a seront liés par la relation

$$c = pa + q.$$

Si ω est constant, le point (x, y, z) décrit la droite

$$\frac{x}{\cos\omega} = \frac{y}{\sin\omega} = \frac{z - qe^{\frac{\omega}{m}}}{p} = ae^{\frac{\omega}{m}}$$

cette droite forme avec la tangente à la courbe un angle V,

$$\cos V = \frac{a + pc}{\sqrt{1 + p^2}\sqrt{c^2 + a^2(1 + m^2)}} =$$
$$= \frac{a(1 + p^2) + pq}{\sqrt{1 + p^2}\sqrt{(pa + q)^2 + a^2(1 + m^2)}}$$

cet angle est constant pour une courbe donnée, il varie avec a ou avec les différentes courbes qui engendrent la surface.

La normale à la surface a pour équations

$$\frac{X - x}{-q\sin\omega + apm\cos\omega} = \frac{Y - y}{q\cos\omega + apm\sin\omega} = \frac{Z - z}{-am}.$$

Elle forme avec la normale principale à la courbe un angle, indépendant de ω, dont le cosinus est

$$\frac{-q + apm^2}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{q^2 + (1 + p^2)a^2m^2}}.$$

CHAPITRE VII

—

LIGNES ASYMPTOTIQUES, LIGNES DE COURBURE

159. z étant fonction des variables indépendantes x et y, l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\delta^2 z}{\delta x dy}\,dxdy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\,dy^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad d^2 z = 0.$$

Si

$$z = x^\alpha y^\beta, \qquad dz = x^\alpha y^\beta\left(\alpha\,\frac{dx}{x} + \beta\,\frac{dy}{y}\right)$$

$$d^2 z = x^\alpha y^\beta\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\alpha\beta}{xy}\,dxdy + \frac{\beta(\beta-1)}{y^2}\,dy^2\right)$$

on a donc

$$\alpha(\alpha-1)y^2dx^2 + 2\alpha\beta xydxdy + \beta(\beta-1)x^2dy^2 = 0.$$

Soient a et b les deux valeurs

$$\frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{\alpha\beta(\alpha+\beta-1)}}{\beta(\beta-1)}$$

$$(xdy - aydx)\,(xdy - bydx) = 0.$$

Si

$$\frac{dy}{y} = a\,\frac{dx}{x}, \qquad \mathrm{L}y = a\mathrm{L}x + \mathrm{L}c, \qquad y = cx^a.$$

Les deux systèmes de lignes asymptotiques ont pour projections sur le plan xoy les courbes :

$$y = cx^a, \qquad y = c'x^b.$$

Pour la surface

$$z = xy^2, \qquad \text{on a :} \qquad dy\left(\frac{dy}{y} + 2\,\frac{dx}{x}\right) = 0.$$

Les lignes asymptotiques sont les droites :

$$y = c, \qquad z = c^2 x,$$

et les courbes :

$$y = \frac{c}{x^2}, \qquad z = \frac{c^2}{x^3}.$$

160. Si la surface est représentée par trois équations donnant x, y, z en fonction de deux paramètres u et v. Le plan tangent a pour équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

où A, B, C, sont les déterminants différentiels :

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \qquad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Si on pose l'identité

$$dA dx + dB dy + dC dz = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$$

elle détermine les trois fonctions D, D′ et D″ de u et v. Le rayon de courbure R d'une section normale à la surface est donné par l'expression

$$\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{R} = \frac{D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2}{ds^2}$$

où ds est l'élément d'arc de la courbe de section. Les directions asymptotiques correspondent à $\frac{1}{R} = 0$; l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0.$$

Mais, le point x, y, z restant sur la surface, on a les identités :

$$A dx + B dy + C dz = 0$$
$$A d^2x + B d^2y + C d^2z + dA dx + dB dy + dC dz = 0.$$

De sorte que l'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'écrire :

$$dA dx + dB dy + dC dz = 0$$

ou

$$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0$$

ce qui donne les expressions :

$$D = -A\frac{\delta^2 x}{\delta u^2} - B\frac{\delta^2 y}{\delta u^2} - C\frac{\delta^2 z}{\delta u^2} = -\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta v} \\ \frac{\delta x^2}{\delta u^2} & \frac{\delta^2 y}{\delta u^2} & \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} \end{vmatrix}$$

$$D' = -A\frac{\delta^2 x}{\delta uv} - B\frac{\delta^2 y}{\delta uv} - C\frac{\delta^2 z}{\delta uv} = -\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 x}{\delta uv} & \frac{\delta^2 y}{\delta uv} & \frac{\delta^2 z}{\delta uv} \end{vmatrix}$$

$$D'' = -\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \\ \frac{\delta x}{\delta v} & \frac{\delta y}{\delta v} & \frac{\delta z}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 x}{\delta v^2} & \frac{\delta^2 y}{\delta v^2} & \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} \end{vmatrix}$$

Si z est fonction de x et y, soit $x = u$, $y = v$. On a :

$$A = \frac{\delta z}{\delta x}, \qquad B = \frac{\delta z}{\delta y}, \qquad C = -1.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dx^2 + 2\frac{\delta^2 z}{\delta xy}dxdy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dy^2 = 0.$$

2° Soit

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r,\theta), \qquad r = u, \qquad \theta = v$$

$$-D = \frac{\delta^2 z}{\delta r^2}r, \quad -D' = \frac{\delta^2 z}{\delta r\theta}r - \frac{\delta z}{\delta\theta}, \quad -D'' = \frac{\delta^2 z}{\delta\theta^2}r + \frac{\delta z}{\delta r}r^2$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta r^2}rdr^2 + 2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta r\theta}r - \frac{\delta z}{\delta\theta}\right)drd\theta + \left(\frac{\delta^2 z}{\delta\theta^2}r + \frac{\delta z}{\delta r}r^2\right)d\theta^2 = 0.$$

Pour la surface

$$z = r\theta\cos\theta + r\sin\theta \mathrm{L}r$$

on a :

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \theta\cos\theta + (1 + \mathrm{L}r)\sin\theta, \qquad \frac{\delta z}{\delta\theta} = r(\cos\theta - \theta\sin\theta + \cos\theta\mathrm{L}r)$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta r^2} = \frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta r\theta} = (2 + \mathrm{L}r)\cos\theta - \theta\sin\theta,$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta\theta^2} = -r(2 + \mathrm{L}r)\sin\theta - r\theta\cos\theta.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques devient :

$$\sin\theta dr^2 + 2r\cos\theta dr d\theta - r^2 \sin\theta d\theta^2 = 0$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{-\cos\theta \pm 1}{\sin\theta}\, d\theta.$$

Les deux solutions sont :

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad \text{et} \qquad \frac{dr}{r} = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$\mathrm{L}r = -2\mathrm{L}\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{L}\frac{c}{2}, \qquad \mathrm{L}r = -2\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2} + \mathrm{L}\frac{c'}{2}.$$

Les projections des lignes asymptotiques sont les paraboles :

$$r(1 \pm \cos\theta) = c$$

ou

$$x^2 + y^2 = (x - c)^2$$
$$y^2 = c^2 - 2cx$$

par chaque point passent deux paraboles correspondant à deux valeurs de c de signes contraires, de produit $-y^2$. Les deux systèmes de lignes asymptotiques correspondent aux valeurs positives et négatives de c.

161. En posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \sqrt{2r}$$

$$\frac{\delta z}{\delta r} = \frac{1}{\sqrt{2r}}, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta r^2} = \frac{-1}{2r\sqrt{2r}}, \qquad \frac{\delta z}{\delta\theta} = 0, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta r\theta} = \frac{\delta^2 z}{\delta\theta^2} = 0.$$

D'après le problème précédent, l'équation différentielle des lignes asymptotiques se réduit à

$$\frac{\delta^2 z}{\delta r^2}\, dr^2 + \frac{\delta z}{\delta r}\, r d\theta^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad dr^2 - 2r^2 d\theta^2 = 0$$

$$\frac{dr}{r} = \pm\sqrt{2}\, d\theta, \qquad \mathrm{L}r = \pm\theta\sqrt{2} + c.$$

Les deux systèmes de lignes asymptotiques ont pour projections les spirales logarithmiques :

$$r = ce^{\theta\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad r = ce^{-\theta\sqrt{2}}.$$

162.

$$z = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{6}{x^4}, \qquad \frac{d^2 z}{\delta xy} = 0, \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = -\frac{6}{y^4}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$\frac{dy^2}{y^4} - \frac{dx^2}{x^4} = 0, \qquad \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{dx}{x^2}.$$

En prenant le signe +, on a le premier système :

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{c}, \quad -z = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+y}{c^2(x-y)}$$

ces courbes sont l'intersection des deux surfaces du second ordre

$$c(x-y) = xy, \qquad c^2z(y-x) = x+y$$

qui passent par l'axe oz. Ces cubiques peuvent se représenter par les équations :

$$x = \frac{2c}{t-1} = 2c\frac{t+1}{t^2-1}, \quad y = \frac{2c}{t+1} = 2c\frac{t-1}{t^2-1}, -z = \frac{t}{c^2} = \frac{t^3-t}{c^2(t^2-1)}$$

Le second système de lignes asymptotiques sera donné par

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c},$$

et se déduit du premier en changeant x en $-x$.

163. On a

$$dz = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy - ydx}{x^2},$$

$$d^2z = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right)^2 - 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy - ydx}{x^3}dx$$

car on suppose $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, si x et y sont variables indépendantes.

L'équation différentielle des lignes asymptotiques, $d^2z = 0$, se décompose ; $xdy - ydx = 0$ donne $y = cx$, $z = \varphi(c)$; les génératrices rectilignes de la surface forment le premier système de lignes asymptotiques, ce que l'on pouvait prévoir. Le second système sera déterminé par la relation différentielle :

$$\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)xdx$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{xdy - ydx}{x^2} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\mathrm{L}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 2\mathrm{L}x + \mathrm{L}c$$

$$\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = cx^2.$$

La courbe

$$x^2 = a^2 \frac{(x^4 + y^4)x^2}{(y^2 - x^2)^2 (x^2 + y^2)}$$

sera la projection d'une ligne asymptotique, si l'on a :

$$\varphi'(t) = ca^2 \frac{1 + t^4}{(1 + t^2)(1 - t^2)^2} = \frac{ca^2}{2}\left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)^2}\right)$$

$$= \frac{ca^2}{4}\left(\frac{2}{1 + t^2} + \frac{1}{(1 + t)^2} + \frac{1}{(1 - t)^2}\right)$$

$$\varphi(t) = \frac{ca^2}{4}\left(\frac{1}{1 - t} - \frac{1}{1 + t} + 2 \operatorname{arc\,tg} t\right) + c'$$

$$z = \mathrm{K}\left(\frac{xy}{x^2 - y^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right) + c''$$

où K et c'' sont des constantes arbitraires.

164. La courbe mobile sera représentée, dans son plan, par l'équation $z = c + f(\rho)$, où c est une fonction de l'angle ω que forme ce plan avec le plan xoz. La surface peut ainsi être représentée par les trois équations :

$$(1) \qquad x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin \omega, \qquad z = f(\rho) + \varphi(\omega)$$

où ρ et ω sont deux paramètres variables. On en déduit :

$$dz = f'(\rho)d\rho + \varphi'(\omega)d\omega = f'(\rho) \frac{xdx + ydy}{\rho} + \varphi'(\omega) \frac{xdy - ydx}{\rho^2}$$

$$d^2z = f''(\rho)\left(\frac{xdx + ydy}{\rho}\right)^2 + f'(\rho)\left(\frac{dx^2 + dy^2}{\rho} - \frac{(xdx + ydy)^2}{\rho^3}\right) +$$

$$+ \varphi''(\omega)\left(\frac{xdy - ydx}{\rho^2}\right)^2 - 2\varphi'(\omega) \frac{xdy - ydx}{\rho^4}(xdx + ydy).$$

En posant $d^2z = 0$, on a l'équation différentielle des lignes asymptotiques, ou l'équation qui détermine les deux directions asymptotiques en chaque point de la surface. Pour qu'en tout point de la surface l'une des directions asymptotiques soit dans le plan $x = c$, $dx = 0$, il faut que le coefficient de dy^2 soit identiquement nul :

$$f''(\rho) \sin^2 \omega + f'(\rho) \frac{\cos^2 \omega}{\rho} + \varphi''(\omega) \frac{\cos^2 \omega}{\rho^2} - 2\varphi'(\omega) \frac{\sin \omega \cos \omega}{\rho^2} = 0,$$

cette relation doit être vérifiée pour toutes valeurs de ω et ρ. Si $\omega = 0$, elle devient

$$f'(\rho) = \frac{a}{\rho},$$

et l'on aura :

$$-a\sin^2\omega + a\cos^2\omega + \varphi''(\omega)\cos^2\omega - 2\varphi'(\omega)\sin\omega\cos\omega = 0$$

Equation différentielle linéaire qui détermine $\varphi'(\omega)$. Si on pose

$$\varphi'(\omega) = \frac{u}{\cos^2\omega}$$

elle devient :

$$u' = -a\cos 2\omega$$

$$u = -\frac{a}{2}\sin 2\omega + b, \qquad \varphi'(\omega) = -a\,\mathrm{tg}\,\omega + \frac{b}{\cos^2\omega}$$

$$f(\rho) = a\mathrm{L}\rho, \qquad \varphi(\omega) = a\mathrm{L}\cos\omega + b\,\mathrm{tg}\,\omega.$$

Il est inutile d'ajouter des constantes à f et φ, si on choisit l'origine des coordonnées, sur oz.

$$(2) \qquad z = a\mathrm{L}(\rho\cos\omega) + b\,\mathrm{tg}\,\omega = a\mathrm{L}x + b\frac{y}{x}$$

$$dz = \frac{a}{x}dx + b\frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$d^2z = -\frac{a}{x^2}dx^2 - 2b\frac{xdy - ydx}{x^3}dx.$$

Les lignes asymptotiques sont déterminées par les équations :

$$dx = 0, \qquad x = c, \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{x}dx + 2b\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

$$a\mathrm{L}x + 2b\frac{y}{x} = c$$

sur la surface (1), pour les sections $z = c$, on a :

$$\frac{dx}{x\varphi'(\omega) + y\rho f'(\rho)} = \frac{dy}{y\varphi'(\omega) - x\rho f'(\rho)} = \frac{dz}{0}.$$

Pour une courbe orthogonale à ces sections, on a :

$$\big(x\varphi'(\omega) + y\rho f'(\rho)\big)dx + \big(y\varphi'(\omega) - x\rho f'(\rho)\big)dy = 0$$

$\omega = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}$ est de degré zéro. Pour que cette équation soit homogène entre x et y, il faut que $\rho f'(\rho)$ soit constant

$$\rho f'(\rho) = a, \qquad f(\rho) = a\mathrm{L}\rho + c.$$

On a alors l'équation différentielle

$$\varphi'(\omega)\rho d\rho - a\rho^2 d\omega = 0$$

$$L\rho = a\int \frac{d\omega}{\varphi'(\omega)}.$$

En particulier, pour la surface (2),

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{a\cos^2\omega}{b - a\sin\omega\cos\omega}\,d\omega = a\,\frac{\cos 2\omega + 1}{2b - a\sin 2\omega}\,d\omega$$

$$L\rho + \frac{1}{2}L(2b - a\sin 2\omega) = a\int \frac{-d\omega}{a\sin 2\omega - 2b} = \frac{a}{2}\int \frac{-d\,\mathrm{tg}\,\omega}{a\,\mathrm{tg}\,\omega - b(1+\mathrm{tg}^2\omega)} =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{a^2-4b^2}}\int\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega - \alpha} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\omega - \beta}\right)d\,\mathrm{tg}\,\omega$$

où

$$\beta = \frac{a - \sqrt{a^2-4b^2}}{2b}, \qquad \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2-4b^2}}{2b}, \qquad a^2 > 4b^2$$

$$L(2b - a\sin 2\omega) + 2L\rho = \frac{a}{\sqrt{a^2-4b^2}}\,L\,\frac{\mathrm{tg}\,\omega - \alpha}{\mathrm{tg}\,\omega - \beta} + c.$$

Si $a^2 < 4b^2$, on a

$$L\rho + \frac{1}{2}L(2b - a\sin 2\omega) = 2ab\int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\omega}{(2b\,\mathrm{tg}\,\omega - a)^2 + 4b^2 - a^2} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{4b^2-a^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2b\,\mathrm{tg}\,\omega - a}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

165. Le plan osculateur à la courbe $y = x^2$, $z = x^3$, a pour équation :

$$3Xx^2 - 3Yx + Z = x^3$$

il contient la droite D, $Z = x^3$, $Y = Xx$.

Cette droite engendre la surface

$$Z = \left(\frac{Y}{X}\right)^3,$$

sur laquelle on a :

$$dZ = 3Y^2\,\frac{XdY - YdX}{X^4}$$

$$d^2Z = 3(XdY - YdX)\,\frac{2XYdY - 4Y^2dX}{X^5}.$$

Les lignes asymptotiques vérifient l'équation

$$(XdY - YdX)(XdY - 2YdX) = 0.$$

Le premier facteur donne les génératrices $Y = cX$, $Z = c^3$.

Pour le second système de lignes asymptotiques, on a :

$$2\frac{dX}{X} = \frac{dY}{Y}, \qquad X^2 = cY, \qquad Z = \left(\frac{X}{c}\right)^3$$

ce sont des cubiques, que l'on peut représenter par les équations

$$X = ct, \qquad Y = ct^2, \qquad Z = t^3.$$

166. Sur la surface S, on a :

$$dy - \beta dx = xd\beta$$
$$dz - udx = (1 + u'_\alpha x)d\alpha + xu'_\beta d\beta = xu'_\beta d\beta = u'_\beta(dy - \beta dx)$$
$$dz = (u - \beta u'_\beta)dx + u'_\beta dy.$$

Le plan tangent a pour équation :

$$(1) \qquad Z - (u - \beta u'_\beta)X - u'_\beta Y = \alpha.$$

Les équations de la normale sont :

$$Z - \alpha - ux = \frac{X - x}{\beta u'_\beta - u} = \frac{Y - \beta x}{-u'_\beta}.$$

2° α et β étant les variables indépendantes, on peut mettre l'équation différentielle des lignes asymptotiques (problème 160) sous la forme :

$$dxd(u - \beta u'_\beta) + dydu'_\beta = 0$$
$$u'_\alpha d\alpha dx + (dy - \beta dx)du'_\beta = 0$$
$$\frac{d\alpha}{u'_\alpha}(u''_{\alpha^2}d\alpha + u''_{\alpha\beta}d\beta) + x\,d\beta(u''_{\alpha\beta}d\alpha + u''_{\beta^2}d\beta) = 0$$
$$u''_{\alpha^2}d\alpha^2 - u''_{\beta^2}\,d\beta^2 = 0.$$

3° Le terme en $d\alpha d\beta$ manquant dans cette équation, il en résulte que les courbes $\alpha = c$ et $\beta = c'$ sont conjuguées ; ou que les directions $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$ sont conjuguées par rapport aux directions asymptotiques en tout point de la surface.

4° Si α est constant, l'intersection du plan tangent (1) et du plan infiniment voisin s'obtient en formant la dérivée par rapport à β :

$$u''_{\beta^2}(\beta X - Y) = 0.$$

Cette droite :

$$Y = \beta X, \qquad Z - uX = \alpha$$

passe par le point

$$X = Y = 0, \qquad Z = \alpha$$

et engendre un cône ayant ce point pour sommet.

5° Si $u = AB + \alpha B_1 + B_2$ le plan tangent (1) a pour équation :

$$Z - (B_2 - \beta B'_2)X - B'_2 Y - A[(B - \beta B')X + B'Y] -$$
$$- \alpha[(B_1 - \beta B'_1)X + B'_1 Y + 1] = 0.$$

Si β est constant, la droite caractéristique de ce plan mobile est déterminée par l'équation dérivée par rapport à α :

$$A'[(B - \beta B')X + B'Y] + (B_1 - \beta B'_1)X + B'_1 Y + 1 = 0.$$

La droite définie par ces deux équations passe par un point fixe, et engendre un cône, dont le sommet est ce point donné par les 3 équations :

$$Z = (B_2 - \beta B'_2)X + B'_2 Y, \qquad (B - \beta B')X + B'Y = 0,$$
$$(B_1 - \beta B'_1)X + B'_1 Y + 1 = 0.$$

6° Si B_1 et B_2 sont alors des fonctions linéaires, leurs dérivées secondes sont nulles,

$$u''_{\alpha^2} = A''B, \qquad u''_{\beta^2} = B''A$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques devient

$$A''B d\alpha^2 = B''A d\beta^2$$
$$\sqrt{\frac{A''}{A}}\, d\alpha = \pm \sqrt{\frac{B''}{B}}\, d\beta.$$

Les variables sont séparées.

167. On peut représenter la courbe c par les équations :

$$x = a \cos t \sqrt{\cos 2t}, \qquad y = a \sin t \sqrt{\cos 2t}, \qquad z = at$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \frac{\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}} = -a \frac{\sin 3t}{\sqrt{\cos 2t}}, \quad \frac{dy}{dt} = a \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$$\frac{dz}{dt} = a, \qquad \frac{ds}{dt} = a\sqrt{1 + \frac{1}{\cos 2t}} = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{1 - 2\sin^2 t}}$$

$$s = a \arcsin(\sqrt{2}\sin t) + c.$$

$$2^\circ \quad V = \iint z\rho d\rho d\omega = a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \omega d\omega \int_0^{a\sqrt{\cos 2\omega}} \rho d\rho = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \omega \cos 2\omega d\omega =$$

$$= \frac{a^3}{8}\left(2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega\right)\Big)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^3}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

3° Sur la courbe c, on a :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2\,\frac{1 + \cos 2t}{\cos 2t}, \qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{a^2 \sin 2t}{\cos^2 2t}$$

$$x'' = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2t}}\,(3 \cos 3t + \sin 3t \operatorname{tg} 2t)$$

$$y'' = \frac{-a}{\sqrt{\cos 2t}}\,(3 \sin 3t - \cos 3t \operatorname{tg} 2t), \qquad z'' = 0$$

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{a^2}{\cos 2t}\,(9 + \operatorname{tg}^2 2t)$$

$$R^2 = \frac{(\Sigma x'^2)^3}{\Sigma x'^2 \Sigma x''^2 - (\Sigma x'x'')^2} = a^2\,\frac{(1 + \cos 2t)^3}{1 + 9\cos 2t + 8\cos^2 2t} = a^2\,\frac{(1 + \cos 2t)^2}{1 + 8\cos 2t}$$

$$\frac{d(R^2)}{dt} = 4a^2\,\frac{(1 + \cos 2t)(3 - 4\cos 2t)}{(1 + 8\cos 2t)^2}\sin 2t.$$

Pour que x et y soient réels, il faut $\cos 2t > 0$, la dérivée de R^2 s'annule pour $\sin 2t = 0$, et $\cos 2t = \frac{3}{4}$, $\sin t = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$. Si t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, R diminue de $\frac{2}{3}a$ à la valeur minimum $\frac{a}{4}\sqrt{7}$, qui correspond à $\sin t = \frac{1}{\sqrt{8}}$, puis R augmente, jusqu'à $R = a$, pour $t = \frac{\pi}{4}$.

Si t varie de $-\frac{\pi}{4}$ à 0, ou de $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$ les variations sont analogues, R repasse par les mêmes valeurs.

168. On a :

$$dx = -a \sin\theta \operatorname{cotg}\varphi d\theta - a(1 + \cos\theta)\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$dy = -a \sin\theta\, d\theta$$

$$dz = \frac{a\cos\theta}{\sin\varphi}\,d\theta - \frac{a\sin\theta}{\sin^2\varphi}\cos\varphi d\varphi$$

$$\begin{vmatrix} dx, & -\sin\theta \operatorname{cotg}\varphi, & 1 + \cos\theta \\ dy, & -\sin\theta, & 0 \\ dz, & \frac{\cos\theta}{\sin\varphi}, & \sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

$$- dx \sin^2 \theta \cos \varphi + \frac{dy}{\sin \varphi} (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos \theta(1 + \cos \theta)) +$$
$$+ dz \sin \theta(1 + \cos \theta) = 0$$
$$- \cos \varphi(1 - \cos \theta)dx + \frac{\cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} dy + \sin \theta \, dz = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\cos \alpha = -(1 - \cos \theta) \sin \varphi \cos \varphi, \qquad \cos \beta = \cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi$$
$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \varphi.$$

En considérant θ et φ comme variables indépendantes, on a :

$$\cos \varphi(1 - \cos \theta)d^2x - \frac{\cos^2 \varphi + \cos \theta \sin^2 \varphi}{\sin \varphi} d^2y - \sin \theta d^2 z =$$
$$= dx \left((1 - \cos \theta) \sin \varphi d\varphi - \cos \varphi \sin \theta d\theta\right) -$$
$$- dy\left(\frac{1 + \sin^2 \varphi(1 - \cos \theta)}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi + \sin \theta \sin \varphi d\theta\right) + \cos \theta dz d\theta$$
$$= \frac{a}{\sin \varphi} (d\theta^2 + 2 \sin \theta \operatorname{cotg} \varphi \, d\theta d\varphi - \sin^2\theta d\varphi^2).$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$d\theta^2 + 2 \sin \theta \operatorname{cotg} \varphi \, d\theta \, d\varphi - \sin^2 \theta \, d\varphi^2 = 0$$
$$\frac{d\theta}{\sin \theta \, d\varphi} = - \operatorname{cotg} \varphi \pm \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \varphi} = - \frac{\cos \varphi \pm 1}{\sin \varphi}.$$

Le premier système est :

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{-1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi, \qquad \frac{-d\theta}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} d\varphi$$
$$- \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 2\mathrm{L} \sin \frac{\varphi}{2} + \mathrm{L}c, \quad \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = c \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Pour le second système

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} d\varphi$$
$$\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = c \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

169. $$dz = f'(xy) (x \, dy + y \, dx)$$
$$d^2z = 2 f'(xy) dx \, dy + f''(xy) (x \, dy + y \, dx)^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$d^2z = 0, \quad \text{ou} \quad 2f'\,dx\,dy + f''(x\,dy + y\,dx)^2 = 0$$

si on pose $xy = t$, on a :

$$x^2 f''(t)\,dt^2 + 2f'(t)\,dx\,(x\,dt - t\,dx) = 0$$

$$t\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \frac{dx}{x}\,dt - \frac{f''}{2f'}\,dt^2 = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2t\frac{f''}{f'}}}{2t}\,dt$$

$$\mathrm{L}x = \int \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2t\frac{f''}{f'}}}{2t}\,dt.$$

2° Si

$$z = e^{a\sqrt{xy}}, \qquad f(t) = e^{a\sqrt{t}}, \qquad f'(t) = e^{a\sqrt{t}}\,\frac{a}{2\sqrt{t}}$$

$$\mathrm{L}f'(t) = a\sqrt{t} + \mathrm{L}\,\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}t$$

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2t}$$

$$\mathrm{L}x = \int \frac{1 \pm \sqrt{a\sqrt{t}}}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}t \pm 2\sqrt{a}\,t^{\frac{1}{4}} + c$$

$$\mathrm{L}\,\frac{y}{x} \pm 4\sqrt{a}\,\sqrt[4]{xy} + 2c = 0$$

ou

$$y = c'\,x\,e^{\pm 4\sqrt{a}\sqrt[4]{xy}}.$$

3° Les courbes $y = cx^n$ ou $\mathrm{L}y = \mathrm{L}c + n\mathrm{L}x$ vérifient la relation différentielle

$$\frac{dy}{y} = n\,\frac{dx}{x}$$

en exprimant que l'une des directions asymptotiques vérifie cette relation, on a :

$$2\,\frac{xy}{n}\,f'(xy) + \left(\frac{n+1}{n}\,xy\right)^2 f''(xy) = 0$$

$$2f'(t) + \frac{(n+1)^2}{n}\,t\,f''(t) = 0$$

$$\frac{f''(t}{f'(t)} = -\frac{2n}{(n+1)^2 t}, \qquad \mathrm{L}f'(t) = -\frac{2n}{(n+1)^2}\,\mathrm{L}t + \mathrm{L}c'$$

$$f'(t) = c't^{-\frac{2n}{(n+1)^2}}, \qquad f(t) = ct^{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}} + c''.$$

En déplaçant l'origine sur oz, on peut supposer $c'' = 0$

$$z = c(xy)^{\frac{n^2+1}{(n+1)^2}}.$$

Les lignes asymptotiques sont alors :

$$\mathrm{L}x = \int \frac{1 \pm \frac{n-1}{n+1}}{2t}\, dt = \frac{n+1 \pm (n-1)}{2(n+1)} \mathrm{L}xy + c'.$$

Les deux systèmes sont :

$$y = c_1 x^n, \qquad x = c_2 y^n$$

170. Soit la surface $z = \mathrm{F}(x, y)$, l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta x^2} dx^2 + 2 \frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta xy} dx\, dy + \frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta y^2} dy^2 = 0$$

doit admettre les solutions $dy = 0$,

$$f(y) dx + x f'(y) dy = 0.$$

Elle doit être équivalente à l'équation

$$f(y)\, dx\, dy + x f'(y) dy^2 = 0.$$

On aura donc :

$$\frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta x^2} = 0, \qquad \frac{2 \frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta xy}}{f(y)} = \frac{\frac{\delta^2 \mathrm{F}}{\delta y^2}}{x f'(y)}$$

$$\mathrm{F} = x\varphi(y) + \psi(y), \qquad \frac{2\varphi'(y)}{f(y)} = \frac{\varphi''(y)}{f'(y)} + \frac{\psi''(y)}{x f'(y)}.$$

Pour que cette équation ait lieu quels que soient x et y, il faut que l'on ait :

$$\psi''(y) = 0, \qquad \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = 2 \frac{f'(y)}{f(y)}$$

$$\psi(y) = ay + b, \qquad \varphi'(y) = c f^2(y)$$

$$z = \mathrm{F}(x, y) = ay + b + cx \int f^2(y) dy + c'x.$$

171. Sur la surface $z = y \sin x$, on a :

$$dz = y \cos x\, dx + \sin x\, dy$$
$$d^2 z = 2 \cos x\, dx\, dy - y \sin x\, dx^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$dx(2\cos x\,dy - y\sin x\,dx) = 0$$

donne les génératrices $x = c$, $z = y\sin c$, et les courbes γ déduites des équations :

$$2\frac{dy}{y} = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,$$

$$2\mathrm{L}y = -\mathrm{L}\cos x + \mathrm{L}c$$

$$y^2\cos x = c, \qquad z = y\sin x$$

au point $x = 0$, $y = \pm\sqrt{c}$, $z = 0$, la tangente est perpendiculaire à oy.

2° Sur cette courbe γ, on a :

$$dy = \frac{y\,\mathrm{tg}\,x}{2}\,dx$$

$$dz = y\left(\cos x + \frac{\sin^2 x}{2\cos x}\right)dx = y\,\frac{1+\cos^2 x}{2\cos x}\,dx$$

$$\frac{dx}{2\cos x} = \frac{dy}{y\sin x} = \frac{dz}{y(1+\cos^2 x)}.$$

Une courbe, tracée sur la surface, sera une trajectoire orthogonale des courbes γ, si l'on a :

$$2\cos x\,dx + y\sin x\,dy + y(1+\cos^2 x)dz = 0.$$

et. comme $dz = \sin x\,dy + y\cos x\,dx$

$$(2 + y^2 + y^2\cos^2 x)\cos x\,dx + (2+\cos^2 x)\,y\sin x\,dy = 0.$$

Si on considère y^2 comme la fonction inconnue, c'est une équation linéaire entre y^2 et sa dérivée ; on est ainsi conduit à intégrer d'abord l'équation homogène

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2-\sin^2 x}{3-\sin^2 x}\,\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left(\frac{\sin x}{3-\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x}\right)\frac{\cos x\,dx}{3}$$

dont l'intégrale est

$$y^6\sin^4 x(3-\sin^2 x) = c$$

de sorte que, si l'on pose :

$$y^2 = u\sin^{-\frac{4}{3}} x(3-\sin^2 x)^{-\frac{1}{3}}.$$

L'équation précédente se réduit à :

$$du = -4\sin^{\frac{1}{3}} x(3-\sin^2 x)^{-\frac{2}{3}}\cos x\,dx$$

En prenant pour variable $\sin^2 x$, c'est une différentielle binome, ce qui conduit à l'écrire :

$$du = -4\left(\frac{3}{\sin^2 x} - 1\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Posons $\frac{3}{\sin^2 x} - 1 = v^3$.

$$du = \frac{6\,dv}{1+v^3} = \left(\frac{2}{1+v} + \frac{1-2v}{1-v+v^2} + \frac{3}{1-v+v^2}\right)dv$$

$$u = 2\mathrm{L}(1+v) - \mathrm{L}(1-v+v^2) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + c.$$

Les trajectoires orthogonales ont pour projection les courbes

$$y^2 \sin^2 x = \frac{1}{v}\left[\mathrm{L}\,\frac{(1+v)^3}{1+v^3} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + c\right]$$

$$v = \sqrt[3]{2 + 3\,\mathrm{cotg}^2 x}.$$

3° La courbe γ qui passe par le point M, $x = z = 0$, $y = a$, a pour équations :

$$y = \frac{a}{\sqrt{\cos x}}, \qquad z = \frac{a \sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

sur cette courbe, on a :

$$y' = \frac{a \sin x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}, \qquad z' = a\,\frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}$$

$$y'' = a\,\frac{2 + \sin^2 x}{4 \cos^2 x \sqrt{\cos x}}, \qquad z'' = a\,\frac{2 + \sin^2 x}{4 \cos^2 x \sqrt{\cos x}} \sin x.$$

Le plan normal a pour équation :

$$2\mathrm{X} \cos x \sqrt{\cos x} + a\mathrm{Y} \sin x + a\mathrm{Z}(1 + \cos^2 x) =$$

$$= 2x \cos x \sqrt{\cos x} + a^2\,\frac{2 + \cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x$$

au point M, le plan normal est :

$$\mathrm{X} + a\mathrm{Z} = 0.$$

L'intersection avec le plan normal infiniment voisin s'obtient en prenant la dérivée par rapport à x, qui, pour $x = 0$, se réduit à

$$a\mathrm{Y} = 2 + 3a^2.$$

La droite polaire Δ au point M a pour équations :

$$Y = 3a + \frac{2}{a}, \qquad X = -aZ.$$

Au point M, on a :

$$y' = 0, \qquad z' = a, \qquad y'' = \frac{a}{2}, \qquad z'' = 0.$$

Le plan osculateur en M a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X, & 1, & 0 \\ Y - a, & 0, & \frac{a}{2} \\ Z, & a, & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad Z = aX.$$

La droite polaire coupe ce plan osculateur au centre de courbure :

$$X = Z = 0, \qquad Y = 3a + \frac{2}{a}$$

oy est la normale principale,

$$R = 2\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

4° Si a augmente de 0 à 1, R diminue de ∞ à $R = 4$. Si a augmente de 1 à $+\infty$, R augmente indéfiniment. Si on change a en $-a$, R prend la même valeur absolue.

5° Si a varie, la droite Δ engendre la surface

$$y + 3\frac{x}{z} + 2\frac{z}{x} = 0.$$

Si on considère y comme fonction de x et z, supposées variables indépendantes, on a :

$$dy = (xdz - zdx)\left(\frac{3}{z^2} - \frac{2}{x^2}\right)$$

$$d^2y = (xdz - zdx)\left(\frac{4dx}{x^3} - \frac{6dz}{z^3}\right).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$(xdz - zdx)\left(\frac{4dx}{x^3} - \frac{6dz}{z^3}\right) = 0$$

donne les génératrices rectilignes :

$$x = cz, \qquad y = -3c - \frac{2}{c}$$

qui sont les droites Δ. Et les courbes dont les projections sur le plan xoz sont

$$3x^2 - 2z^2 = cx^2z^2.$$

172. Si x et y sont les variables indépendantes, on a :

$$\operatorname{cotg}\frac{y}{x}\,dx - \frac{xdy - ydx}{x\sin^2\frac{y}{x}} + \left(\operatorname{cotg} z - \frac{z}{\sin^2 z}\right)dz = 0$$

$$-\frac{xdy - ydx}{x^2\sin^2\frac{y}{x}}\,dx + (xdy - ydx)\left(\frac{dx}{x^2\sin^2\frac{y}{x}} + 2\,\frac{xdy - ydx}{x^3\sin^3\frac{y}{x}}\right)$$

$$-\left(\frac{2}{\sin^2 z} - \frac{2z\cos z}{\sin^3 z}\right)dz^2 + \left(\operatorname{cotg} z - \frac{z}{\sin^2 z}\right)d^2z = 0.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est $d^2z = 0$, ou :

$$\frac{(xdy - ydx)^2}{x^3\sin^3\frac{y}{x}} = \frac{\sin z - z\cos z}{\sin^3 z}\,dz^2 = \frac{1 - z\operatorname{cotg} z}{\sin^2 z}\,dz^2.$$

Si on pose

$$\frac{y}{x} = u, \qquad x = \operatorname{tg} u(1 - z\operatorname{cotg} z)$$

on a :

$$\frac{du^2}{\sin^3 u}\operatorname{tg} u = \frac{dz^2}{\sin^2 z}$$

$$\frac{dz}{\sin z} = \pm\frac{du}{\sin u\sqrt{\cos u}}.$$

Soit $\cos u = t^2$.

$$\frac{dz}{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}\cos^2\frac{z}{2}} = \pm\frac{2dt}{1 - t^4} = \pm\left(\frac{1}{1 + t^2} + \frac{1}{2(1 - t)} + \frac{1}{2(1 + t)}\right)dt.$$

$$\mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \pm\left(\operatorname{arc\,tg} t + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1 + t}{1 - t}\right) + c$$

où

$$t = \sqrt{\cos\frac{y}{x}}.$$

173. Le plan osculateur à la cubique,

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$

a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x - t, & 1, & 0 \\ y - t^2, & 2t, & 1 \\ z - t^3, & 3t^2, & 3t \end{vmatrix} = 0, \qquad 3t^2x - 3ty + z = t^3.$$

Il coupe oz au point A :

$$x = y = 0, \qquad z = t^3.$$

La droite MA a pour équations :

$$y = tx, \qquad z = t^3.$$

Elle engendre la surface $z = \left(\frac{y}{x}\right)^3$.

Sur cette surface, on a :

$$dz = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$d^2z = 6(xdy - ydx)y \frac{xdy - 2ydx}{x^5}.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques :

$$(xdy - ydx)(xdy - 2ydx) = 0$$

donne :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \qquad y = cx$$

génératrices rectilignes.

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}, \qquad y = cx^2.$$

Les lignes asymptotiques du second système peuvent se représenter par

$$x = t, \qquad y = ct^2, \qquad z = c^3t^3.$$

Les projections des lignes asymptotiques qui passent par le point B, $x = y = 1$, sont la droite $y = x$, et la parabole $y = x^2$. Celles qui passent par le point C(1, 2), sont la droite $y = 2x$, et la parabole $y = 2x^2$.

La droite $y = x$ coupe la parabole $y = 2x^2$ au point D, $x = y = \frac{1}{2}$. La droite $y = 2x$ coupe la parabole $y = x^2$ au point E, $x = 2$, $y = 4$. Le quadrilatère BECD (*fig.* 14) est limité par la parabole $y = x^2$ entre les points B(1, 1) et E(2, 4), la droite $y = 2x$

entre E et C(1,2), la parabole $y = 2x^2$ entre C et D $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et la droite DB entre D et B. L'aire intérieure à ce quadrilatère est définie par les inégalités

$$x^2 < y < 2x^2, \qquad x < y < 2x.$$

Le volume est :

$$V = \iint \left(\frac{y}{x}\right)^3 dxdy$$

à l'intérieur du quadrilatère.

Si

$\frac{1}{2} < x < 1$ on a $x < y < 2x^2$

Si

$1 < x < 2$ $x^2 < y < 2x.$

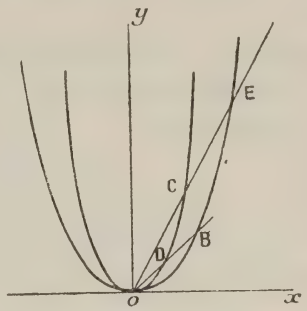


Fig. 14

On a donc

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3} \int_x^{2x^2} y^3 dy + \int_1^2 \frac{dx}{x^3} \int_{x^2}^{2x} y^3 dy$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{16x^8 - x^4}{4x^3} dx + \int_1^2 \frac{16x^4 - x^8}{4x^3} dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^6 - \frac{x^2}{8}\right)_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(2x^2 - \frac{x^6}{24}\right)_1^2 =$$

$$= \frac{9}{16} + \frac{27}{8} = \frac{63}{8}.$$

174. Sur la surface

$$x = (1 + u) \operatorname{ch} v, \qquad y = (1 - u) \operatorname{sh} v, \qquad z = u$$

où

$$\operatorname{ch} v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}, \qquad \operatorname{sh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2},$$

si u et v sont les variables indépendantes, on a :

$$dx = \operatorname{ch} v du + (1 + u) \operatorname{sh} v dv$$
$$dy = - \operatorname{sh} v du + (1 - u) \operatorname{ch} v dv$$
$$(1 - u) \operatorname{ch} v dx - (1 + u) \operatorname{sh} v dy + (u - \operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v) dz = 0$$
$$(1 - u) \operatorname{ch} v d^2x - (1 + u) \operatorname{sh} v d^2y = \big(\operatorname{ch} v du - (1 - u) \operatorname{sh} v dv\big) dx +$$
$$+ \big(\operatorname{sh} v du + (1 + u) \operatorname{ch} v dv\big) dy - (du - 4 \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v dv) du =$$
$$= 4 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v du dv + (1 - u^2)(\operatorname{ch}^2 v - \operatorname{sh}^2 v) dv^2.$$

Les lignes asymptotiques, obtenues en exprimant que leur plan osculateur est tangent à la surface, ont pour équation différentielle

$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0$$

où A, B, C sont les coefficients de l'équation du plan tangent, ou :

$$4 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v du dv + (1 - u^2) dv^2 = 0$$

l'un des systèmes, $v = C$, est formé de droites ; pour le second système, on a :

$$\frac{4\,du}{u^2 - 1} = \frac{dv}{\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v}$$

$$2\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)du = \left(\frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v} - \frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v}\right)dv$$

$$2L\,\frac{1+u}{1-u} = L\,\frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v} + 2Lc, \qquad \frac{1+u}{1-u} = c\sqrt{\frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh} v}}$$

$$u = \frac{c\sqrt{\operatorname{ch} v} - \sqrt{\operatorname{sh} v}}{c\sqrt{\operatorname{ch} v} + \sqrt{\operatorname{sh} v}}.$$

2° Sur la surface

$$x = (1 + u)\cos v, \qquad y = (1 - u)\sin v, \qquad z = u$$

on a :

$$dx = \cos v du - (1 + u)\sin v dv,$$
$$dy = -\sin v du + (1 - u)\cos v dv$$
$$(1 - u)\cos v dx + (1 + u)\sin v dy + (u - \cos^2 v + \sin^2 v)dz = 0$$
$$(1 - u)\cos v d^2x + (1 + u)\sin v d^2y =$$
$$= \big(\cos v du + (1 - u)\sin v dv\big)dx - \big(\sin v du + (1 + u)\cos v dv\big)dy -$$
$$- (du + 4\sin v \cos v dv)du$$
$$= -4\sin v \cos v du dv + (u^2 - 1)dv^2$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$4\sin v \cos v du dv - (u^2 - 1)dv^2 = 0$$

donne $v = c$ pour le premier système, et :

$$\frac{4du}{u^2 - 1} = \frac{dv}{\sin v \cos v} = \frac{dv}{\operatorname{tg} v \cos^2 v}$$

$$2L\,\frac{1+u}{1-u} = -L \operatorname{tg} v + 2Lc, \qquad \frac{1+u}{1-u} = c\sqrt{\operatorname{cotg} v}$$

$$u = \frac{c\sqrt{\cos v} - \sqrt{\sin v}}{c\sqrt{\cos v} + \sqrt{\sin v}}.$$

3° Si, dans les équations de la première surface, on change v en vi, elles deviennent

$$x = (1 + u)\,\mathrm{ch}\, vi = (1 + u)\,\frac{e^{vi} + e^{-vi}}{2} = (1 + u)\cos v$$

$$y = (1 - u)\,\mathrm{sh}\, vi = (1 - u)\,\frac{e^{vi} - e^{-vi}}{2} = (1 - u)i \sin v$$

il suffirait de remplacer y par yi pour retrouver les équations de la seconde surface. D'autre part, on a les lignes asymptotiques :

$$\frac{1 + u}{1 - u} = c\sqrt{\frac{\cos v}{i \sin v}},$$

et comme c est une constante arbitraire, en remplaçant c par $c\sqrt{i}$ on retrouve les lignes asymptotiques de la seconde surface. Ces deux surfaces se correspondent, à la valeur vi correspond le point imaginaire x, y, z de la première, et le point réel x, $\frac{y}{i}$, z de la seconde, l'équation entre u et v qui représente les lignes asymptotiques est la même, pour les deux surfaces, v et c étant réels pour l'une, imaginaires pour l'autre.

175. Soit $z = f(x)$, $y = 0$ l'équation de la méridienne de la surface de révolution autour de oz. φ est l'angle de la tangente à cette courbe avec oz

$$\mathrm{cotg}\,\varphi = z', \qquad z'' = \frac{dz'}{dx} = -\frac{\varphi'}{\sin^2\varphi}.$$

La normale à la coupe méridienne

$$(Z - z)z' + X - x = 0$$

coupe l'axe au point

$$X = 0, \qquad Z = z + \frac{x}{z'},$$

le rayon de courbure R_1 est la longueur de cette normale

$$R_1 = \frac{x}{z'}\sqrt{1 + z'^2}$$

R_2 est le rayon de courbure de la courbe méridienne

$$R_2 = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{xz''}{z'(1 + z'^2)} = -x\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}.$$

On a ainsi :

$$-x \operatorname{tg} \varphi \frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{f(\varphi)} d\varphi, \qquad \mathrm{L}x = -\int \frac{\operatorname{tg} \varphi}{f(\varphi)} d\varphi$$

on en déduit une relation entre x et φ, ou une relation différentielle entre $\frac{dz}{dx}$ et x. Si $f(\varphi) = \frac{m}{\cos \varphi} - 1$

$$\mathrm{L}x = \int \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - m} = -\mathrm{L}(\cos \varphi - m) + \mathrm{L}c$$

$$x(\cos \varphi - m) = c, \qquad z' = \frac{c + mx}{\sqrt{x^2 - (c + mx)^2}}$$

$$z = \int \frac{c + mx(1 - m^2) - cm^2}{(1 - m^2)\sqrt{x^2(1 - m^2) - 2cmx - c^2}} dx.$$

Si $m^2 < 1$,

$$z = \frac{m}{1 - m^2} \sqrt{x^2 - (c + mx)^2} +$$

$$+ \frac{c}{(1 - m^2)\sqrt{1 - m^2}} \mathrm{L}\left(x - \frac{cm}{1 - m^2} + \sqrt{\frac{x^2 - (c + mx)^2}{1 - m^2}}\right) + c'$$

Si $m^2 > 1$

$$z = \frac{m}{1 - m^2}\sqrt{x^2 - (c + mx)^2} - \frac{c}{(m^2 - 1)\sqrt{m^2 - 1}} \arcsin \frac{x(m^2 - 1) + cm}{c\sqrt{2m^2 - 1}}$$

Si $m = 1$

$$z = \int \frac{c + x}{\sqrt{-c(2x + c)}} dx = \frac{x + 2c}{3}\sqrt{\frac{2x + c}{-c}} + c'$$

Si $m = 0$

$$z = \int \frac{c}{\sqrt{x^2 - c^2}} dx = c\mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 - c^2}\right) + c'$$

chaînette. On peut supposer

$$c' = -c\mathrm{L}c, \qquad x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}\right).$$

176. La normale a pour équations :

$$\frac{\mathrm{X} - x}{y(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\operatorname{tg} x} = \frac{\mathrm{Z} - y \operatorname{tg} x}{-1} = u$$

à chaque valeur de u correspond un point de la normale. Le centre de courbure est le point d'intersection de deux normales infiniment voisines, que l'on peut obtenir en faisant varier x, y, u de façon que dX, dY, dZ soient nuls :

$$\left(1 + \frac{2uy}{\cos^2 x} \operatorname{tg} x\right) dx + \frac{udy + ydu}{\cos^2 x} = 0$$

$$\frac{u}{\cos^2 x} dx + dy + \operatorname{tg} x du = 0$$

$$\frac{ydx}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x dy - du = 0.$$

En éliminant dx, dy, du, on a :

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x + 2uy \operatorname{tg} x, & u, & y \\ u, & \cos^2 x, & \cos^2 x \operatorname{tg} x \\ y, & \cos^2 x \operatorname{tg} x, & -\cos^2 x \end{vmatrix} = 0$$

$$u^2 = y^2 + \cos^2 x$$

à chaque valeur $u = \pm\sqrt{y^2 + \cos^2 x}$ correspond un centre de courbure X, Y, Z ; les rayons de courbure sont égaux, et de sens contraires,

$$R = u\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 x)\left(1 + \frac{y^2}{\cos^2 x}\right)} = 1 + \frac{y^2}{\cos^2 x}.$$

2° Sur la surface, on a :

$$dz = \frac{ydx}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x dy$$

$$d^2z = \frac{2dxdy}{\cos^2 x} + 2y \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$dx(dy + y \operatorname{tg} x dx) = 0.$$

Le premier système est formé des génératrices

$$x = c, \qquad z = y \operatorname{tg} c.$$

Pour le second système, on a :

$$\frac{dy}{y} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0$$

$$Ly - L\cos x = Lc, \qquad y = c\cos x.$$

3° Si le point $M(x, y, z)$ décrit la courbe $y = c \cos x$, $z = c \sin x$ on a $u = \pm \sqrt{1 + c^2} \cos x$, les centres de courbure principaux sont :

$$X = x \pm c\sqrt{1 + c^2}, \qquad Y = c \cos x \pm \sqrt{1 + c^2} \sin x,$$
$$Z = c \sin x \mp \sqrt{1 + c^2} \cos x.$$

Ils décrivent deux hélices situées sur le cylindre de révolution

$$Y^2 + Z^2 = 1 + 2c^2.$$

En faisant tourner les axes autour de oX d'un angle α, tel que

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{1 + 2c^2}}, \quad \sin \alpha = \mp \sqrt{\frac{1 + c^2}{1 + 2c^2}},$$

et déplaçant l'origine sur oX, de $\pm c\sqrt{1 + c^2}$, on ramène les équations de cette courbe à la forme :

$$Y_1 = \frac{cY \mp Z\sqrt{1 + c^2}}{\sqrt{1 + 2c^2}} = \sqrt{1 + 2c^2} \cos X_1$$
$$Z_1 = \frac{\pm Y\sqrt{1 + c^2} + cZ}{\sqrt{1 + 2c^2}} = \sqrt{1 + 2c^2} \sin X_1$$
$$X_1 = X \mp c\sqrt{1 + c^2} = x.$$

Un arc de cette hélice est

$$s = \sqrt{2(1 + c^2)}\,(x - x_0).$$

Si M décrit une génératrice de la surface, x reste constant.

On a les centres de courbure :

$$X = x \pm \frac{y}{\cos^2 x}\sqrt{y^2 + \cos^2 x}$$
$$Y = y \pm \operatorname{tg} x \sqrt{y^2 + \cos^2 x}$$
$$Z = y \operatorname{tg} x \mp \sqrt{y^2 + \cos^2 x}.$$

En faisant tourner les axes de l'angle constant x, autour de oX, et déplaçant l'origine sur oX, on a :

$$Y_1 = Y \cos x + Z \sin x = \frac{y}{\cos x}$$
$$Z_1 = -Y \sin x + Z \cos x = \mp \frac{1}{\cos x}\sqrt{y^2 + \cos^2 x}$$
$$X_1 = X - x = \pm \frac{y}{\cos^2 x}\sqrt{y^2 + \cos^2 x}$$
$$Y_1^2 - Z_1^2 + 1 = 0, \qquad Y_1 Z_1 + X_1 = 0$$

courbe du quatrième ordre.

4° Sur cette courbe, si y varie, x restant constant, on a :

$$dX = \pm\left(\sqrt{y^2 + \cos^2 x} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2 + \cos^2 x}}\right)\frac{dy}{\cos^2 x}$$

$$dY = \left(1 \pm \frac{y \operatorname{tg} x}{\sqrt{y^2 + \cos^2 x}}\right) dy, \qquad dZ = \left(\operatorname{tg} x \mp \frac{y}{\sqrt{y^2 + \cos^2 x}}\right) dy$$

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 2\,\frac{2y^2 + \cos^2 x}{\cos^4 x}\, dy^2$$

$$s\sqrt{2} = \frac{1}{\cos^2 x}\int \frac{4y^2 + \cos^2 x}{\sqrt{2y^2 + \cos^2 x}}\, dy + \int \frac{dy}{\sqrt{2y^2 + \cos^2 x}} =$$

$$= \frac{y}{\cos^2 x}\sqrt{2y^2 + \cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, L(y\sqrt{2} + \sqrt{2y^2 + \cos^2 x}) + c.$$

177. Les rayons de courbure principaux R, R_1 sont donnés par l'équation :

$$(rt - s^2)R^2 - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

$$p = f'(x), \quad q = \varphi'(y), \quad r = f''(x), \quad s = 0, \quad t = \varphi''(y)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$(R + R_1)\cos\gamma = \frac{1 + p^2}{r} + \frac{1 + q^2}{t} = c$$

comme $\frac{1 + p^2}{r}$ est une fonction de x, $\frac{1 + q^2}{t}$ une fonction de y, leur somme ne peut être constante, que si ces deux fonctions sont constantes :

$$\frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} = a, \qquad \frac{\varphi''(y)}{1 + \varphi'^2(y)} = b, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = c$$

$$\operatorname{arc\,tg} f'(x) = ax + A, \quad f'(x) = \operatorname{tg}(ax + A), \quad f(x) = -\frac{1}{a} L\cos(ax + A)$$

$$\varphi(y) = -\frac{1}{b} L\cos(by + B)$$

$$z = -\frac{1}{a} L\cos(ax + A) - \frac{1}{b} L\cos(by + B).$$

2° $p = \operatorname{tg}(ax + A)$, $q = \operatorname{tg}(by + B)$, $r = \frac{a}{\cos^2(ax + A)}$, $t = \frac{b}{\cos^2(by + B)}$

$$R^2 - R\sqrt{1 + p^2 + q^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt} = 0$$

$$(R - R_1)\cos\gamma =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 - \frac{4}{ab}(1+\operatorname{tg}^2(ax+A)+\operatorname{tg}^2(by+B))\cos^2(ax+A)\cos^2(by+B)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \frac{4}{ab}\sin^2(ax+A)\sin^2(by+B)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sin(ax+A)\sin(by+B)}.$$

Le produit $(R - R_1)\cos\gamma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ est constant si $a = b$. En déplaçant l'origine des coordonnées, on peut ramener l'équation de la surface à la forme :

$$z = \frac{-1}{a} L(\cos ax \cos ay).$$

3° Pour cette surface, on a :

$$p = \operatorname{tg} ax, \qquad q = \operatorname{tg} ay.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

$$\left(\frac{dx}{\cos^2 ax} + \operatorname{tg} ax \operatorname{tg} ay\, dy\right)\frac{dy}{\cos^2 ay} = \left(\frac{dy}{\cos^2 ay} + \operatorname{tg} ax \operatorname{tg} ay\, dx\right)\frac{dx}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{dy^2}{\cos^2 ay} = \frac{dx^2}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{dy}{\cos ay} = \pm\frac{dx}{\cos ax}$$

$$\frac{dy}{2\operatorname{tg}\frac{\pi - 2ay}{4}\cos^2\frac{\pi - 2ay}{4}} = \frac{\pm dx}{2\operatorname{tg}\frac{\pi - 2ax}{4}\cos^2\frac{\pi - 2ax}{4}}$$

$$L\operatorname{tg}\frac{\pi - 2ay}{4} = \pm L\operatorname{tg}\frac{\pi - 2ax}{4} + C.$$

On a les deux systèmes de lignes de courbure :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi - 2ay}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi \pm 2ax}{4} = C.$$

Les rayons de courbure se déduisent des relations :

$$R + R_1 = \frac{2}{a\cos\gamma}, \qquad R - R_1 = \frac{2\sin ax \sin ay}{a\cos\gamma}.$$

178. La surface enveloppe est déterminée par les deux équations :

$$(1)\quad (x-a)^2+(y-f(a))^2+z^2=1,\quad x-a+(y-f(a))f'(a)=0.$$

Pour chaque valeur de a, elles représentent un cercle de centre

$$x=a,\qquad y=f(a),\qquad z=0$$

et de rayon 1. Le plan du cercle reste perpendiculaire à la courbe, lieu du centre, qui a pour équations

$$z=0,\qquad y=f(x).$$

C'est une surface canal. Si a reste constant, les normales à la surface aux points du cercle, qui sont aussi normales à la sphère, restent dans le plan du cercle. Ces cercles forment un système de lignes de courbure.

2° En un point M(x, y, z) de la surface, la normale est la droite qui joint ce point au centre C du cercle (1), MC = 1, si γ est l'angle de la normale avec oz, on a $\cos\gamma=z$. Si z reste constant les normales forment un angle constant avec le plan de la section, il en résulte que les courbes $z=c$ sont des lignes de courbure. Pour ces courbes, on a, en effet :

$$dz=pdx+qdy=0,\qquad 1+p^2+q^2=\frac{1}{\cos^2\gamma},\qquad pdp+qdq=0$$

et l'équation des lignes de courbure

$$\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}$$

est vérifiée. Les projections de ces courbes sont des courbes parallèles à la courbe lieu des centres, obtenues en portant sur les normales une longueur constante, égale à $\sqrt{1-z^2}$.

3° En un point de la surface S, l'un des centres de courbure est le centre C (a, $f(a)$, o) du cercle (1). Si, par l'autre centre de courbure principal, on abaisse une perpendiculaire sur le plan $Z=z$, le pied de cette perpendiculaire est le centre de courbure de la section. Cette droite passe donc aussi par le centre de courbure de la courbe parallèle, lieu du point C. Le second centre de courbure principal est donc l'intersection de la normale MC avec la parallèle à oz menée par le centre de courbure, en C, de la courbe plane, lieu du point C.

179. L'enveloppe de la sphère

$$ax\lambda^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)\lambda + 2ay = 0$$

s'obtient en exprimant que cette équation en λ a deux racines égales :

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 = 8a^2xy.$$

Pour avoir l'enveloppe de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 2a(x + y)\cos\mu + 2az\sin\mu$$

on formera la dérivée par rapport à μ

$$(x + y)\sin\mu = z\cos\mu$$

on en déduit

$$\frac{\sin\mu}{z} = \frac{\cos\mu}{x + y} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}{2az^2 + 2a(x + y)^2}$$

l'élimination de μ donne la surface enveloppe

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 = 4a^2(z^2 + x^2 + y^2 + 2xy).$$

Pour reconnaître qu'elle est identique à l'équation (1), il suffit d'ordonner par rapport à a^2. Les lignes de courbure sont les cercles, intersection de deux sphères infiniment voisines, dans chacun des systèmes de sphères. Car les normales aux divers points de ces cercles sont normales à la sphère, et forment un cône de révolution. On a ainsi les deux systèmes de cercles :

$$2y = \lambda^2 x, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2a\lambda x - a^2 = 0$$

$$z = (x + y)\operatorname{tg}\mu, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 2a\frac{x + y}{\cos\mu},$$

Les centres de courbure principaux, intersections des normales infiniment voisines aux points d'une ligne de courbure, sont les centres des deux sphères :

$$x = -\frac{a\lambda}{2}, \qquad y = -\frac{a}{\lambda}, \qquad z = 0$$

et

$$x = a\cos\mu, \qquad y = a\cos\mu, \qquad z = a\sin\mu$$

où λ et μ sont des fonctions des coordonnées d'un point de la surface. Le premier centre de courbure décrit l'hyperbole

$$2xy = a^2, \qquad z = 0.$$

Le second décrit l'ellipse

$$x = y, \qquad x^2 + z^2 = a^2.$$

180. Les rayons de courbure principaux R sont donnés par l'équation

$$(rt - s^2)R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]R + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

où

$$p = f'(x), \qquad r = f''(x), \qquad q = \varphi'(y), \qquad t = \varphi''(y), \qquad s = 0$$

$$2MA = R_1 + R_2 = \sqrt{1+p^2+q^2}\left(\frac{1+p^2}{r} + \frac{1+q^2}{t}\right).$$

La projection de MA sur oz sera

$$\frac{MA}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1+f'^2(x)}{2f''(x)} + \frac{1+\varphi'^2(y)}{2\varphi''(y)}$$

pour qu'elle soit constante, quels que soient x et y, il faut que l'on ait

$$\frac{f''}{1+f'^2} = a, \qquad \text{arc tg}\, f'(x) = ax + c$$

$$f'(x) = \text{tg}\,(ax + c), \qquad f(x) = -\frac{1}{a}\,\text{L}\cos(ax + c) + c_1$$

et, de même

$$\varphi(y) = -\frac{1}{b}\,\text{L}\cos(by + c') + c_2$$

en choisissant l'origine des coordonnées, on peut ramener l'équation de la surface à la forme :

$$z = -\frac{1}{a}\,\text{L}\cos ax - \frac{1}{b}\,\text{L}\cos by$$

$$\frac{MA}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$$

on a alors :

$$p = \text{tg}\, ax, \qquad q = \text{tg}\, by, \qquad r = \frac{a}{\cos^2 ax}, \qquad s = 0, \qquad t = \frac{b}{\cos^2 by}$$

$$R^2 - \frac{a+b}{ab}\sqrt{1+\text{tg}^2 ax + \text{tg}^2 by}\,R + \frac{1}{ab}(1+\text{tg}^2 ax + \text{tg}^2 by)^2\cos^2 ax\cos^2 by = 0$$

$$dz = \text{tg}\,(ax)dx + \text{tg}\,(by)dy$$

$$d^2z = \frac{a}{\cos^2 ax}\,dx^2 + \frac{b}{\cos^2 by}\,dy^2$$

les lignes asymptotiques sont données par l'équation :

$$\frac{dx}{\cos ax} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}\,\frac{dy}{\cos by}$$

$$\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}\right)\frac{adx}{\cos^2\frac{ax}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-a}{b}}\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{by}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{by}{2}}\right)\frac{bdy}{\cos^2\frac{by}{2}}$$

$$\mathrm{L}\,\frac{1+\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{ax}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\operatorname{tg}\frac{by}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{by}{2}} + c.$$

On a :

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\mathrm{D}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\mathrm{R}_2-\mathrm{R}_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\frac{\sqrt{1+q^2}}{p}\,\frac{\sqrt{1+p^2}}{q} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2(\operatorname{cotg}^2 ax + \operatorname{cotg}^2 by + \operatorname{cotg}^2 ax\operatorname{cotg}^2 by)}$$

qui sera constant si $a = b$.

181. La normale à la courbe plane

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u, \qquad y = \psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u$$

a pour équation :

$$\mathrm{Y}\cos u - \mathrm{X}\sin u = \psi'(u).$$

La développée s'obtient en prenant la dérivée par rapport à u

$$\mathrm{Y}\sin u + \mathrm{X}\cos u = -\psi''(u).$$

Si on remplace $\psi(u)$ par $\psi(u) + c$, on a des courbes parallèles, qui ont la même développée, qui se déduisent de la première, en prolongeant la normale de la longueur c.

2° Sur la surface

$$x = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u + \varphi(z)\cos u$$
$$y = \psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u + \varphi(z)\sin u$$

on a :

$$dx = -\big(\psi(u) + \psi''(u) + \varphi(z)\big)\sin u du + \varphi'(z)\cos u dz$$
$$dy = \big(\psi(u) + \psi''(u) + \varphi(z)\big)\cos u du + \varphi'(z)\sin u dz$$
$$\cos u\, dx + \sin u dy = \varphi'(z) dz$$
$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\cos u}{\varphi'(z)}, \qquad q = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\sin u}{\varphi'(z)}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\frac{dx + pdx}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

$$\frac{-\left(\psi(u) + \psi''(u) + \varphi(z)\right) \sin u du + \left(\varphi'(z) + \frac{1}{\varphi'(z)}\right) \cos u dz}{-\sin u \varphi'(z) du - \cos u \varphi''(z) dz} =$$

$$= \frac{\left(\psi(u) + \psi''(u) + \varphi(z)\right) \cos u du + \left(\varphi'(z) + \frac{1}{\varphi'(z)}\right) \sin u dz}{\cos u \varphi'(z) du - \sin u \varphi''(z) dz}$$

qui se réduit à

$$[(\psi(u) + \psi''(u) + \varphi(z))\varphi''(z) + 1 + \varphi'(z)^2] du dz = 0.$$

Les lignes de courbure sont les courbes $u = c$, $z = c'$. Ce résultat peut aussi se déduire des équations de la normale :

$$\frac{X - x}{\cos u} = \frac{Y - y}{\sin u} = \frac{Z - z}{-\varphi'(z)}.$$

Si $z = c'$, la normale aux points de la section forme, avec oz, un angle constant, dont le cosinus est

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(z)}}.$$

Il en résulte que ces courbes planes sont des lignes de courbure. Les projections de ces courbes sur le plan xoy sont des courbes parallèles. La surface est engendrée par ces courbes parallèles assujetties à rencontrer une courbe qui peut être arbitraire.

Si $u = c$, on a une courbe plane

$$x \cos u + y \sin u = \psi(u) + \varphi(z)$$
$$y \cos u - x \sin u = \psi'(u)$$

les normales aux points de cette courbe sont situées dans son plan, c'est donc une ligne de courbure. Lorsque u varie, le plan de cette courbe se déplace en restant tangent à un cylindre parallèle à l'axe oz ; chaque point de la courbe, correspondant à une valeur de z, décrit une section droite de ce cylindre. La surface est aussi engendrée par une courbe plane, dont le plan roule, sans glisser, sur un cylindre ; c'est donc une surface moulure.

Lorsque z reste constant, le point de la surface décrit une courbe dont le centre de courbure a pour coordonnées

$$X = -\psi'(u) \sin u - \psi''(u) \cos u, \qquad Y = \psi'(u) \cos u - \psi''(u) \sin u, \qquad Z = z$$

ce point est, d'après le théorème de Meusnier, la projection, sur le plan de la section, du centre de courbure de la surface situé sur la normale, et qui est ainsi déterminé par les relations ;

$$\frac{X-x}{\cos u}=\frac{Y-y}{\sin u}=\frac{Z-z}{-\varphi'(z)}=-\psi''(u)-\psi(u)-\varphi(z).$$

L'autre centre de courbure principal est le centre de courbure de la section plane $u=c$, qui est donné par les équations :

$$\frac{X-x}{\cos u}=\frac{Y-y}{\sin u}=\frac{Z-z}{-\varphi'(z)}=\frac{1+\varphi'(z)^2}{\varphi''(z)}.$$

182. Sur cette surface, on a :

$$dx=\cos u\sin v du+\sin u\cos v dv$$
$$dy=\cos u\cos v du-\sin u\sin v dv$$
$$dz=\frac{\cos^2 u}{\sin u}du+f'(v)dv$$

$$\begin{vmatrix} dx, & \cos u\sin v, & \sin u\cos v \\ dy, & \cos u\cos v, & -\sin u\sin v \\ dz, & \dfrac{\cos^2 u}{\sin u}, & f'(v) \end{vmatrix}=0$$

$$(\cos vf'(v)+\cos u\sin v)dx+(-\sin vf'(v)+\cos u\cos v)\,dy-$$
$$-\sin u dz=0.$$

La normale a pour équations :

$$\frac{X-x}{\cos vf'(v)+\cos u\sin v}=\frac{Y-y}{-\sin vf'(v)+\cos u\cos v}=\frac{Z-z}{-\sin u.}$$

En représentant par A, B, C les dénominateurs, l'équation différentielle des lignes de courbure peut se mettre sous la forme :

$$\begin{vmatrix} A, & dA, & dx \\ B, & dB, & dy \\ C, & dC, & dz \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} \cos vf'+\cos u\sin v, & (f''+\cos u)\cos vdv-f'\sin vdv-\sin u\sin vdu, & \cos u\sin vdu+ \\ & & +\sin u\cos vdv \\ -\sin vf'+\cos u\cos v, & -(f''+\cos u)\sin vdv-f'\cos vdv-\sin u\cos vdu, & \cos u\cos vdu- \\ & & -\sin u\sin vdv \\ -\sin u, & -\cos udu, & \dfrac{\cos^2 u}{\sin u}du+f'dv \end{vmatrix}=0.$$

Si on multiplie les éléments de la première colonne par $f'(v)dv$, de la seconde par $\cos u$, de la troisième par $\sin u$, et si on ajoute, on obtient, pour les trois lignes :

$$(1 + f'^2 + f'' \cos u) \cos v dv, \qquad -(1 + f'^2 + f'' \cos u) \sin v dv, \qquad 0.$$

On peut donc remplacer les éléments de la dernière colonne par $\cos v dv$, $-\sin v dv$, 0, et l'équation des lignes de courbure devient :

$$dv \begin{vmatrix} \cos u \sin v, & (f' dv + \sin u du) \sin v, & \cos v \\ \cos u \cos v, & (f' dv + \sin u du) \cos v, & -\sin v \\ -\sin u, & \cos u du, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$dv(du + f'(v) \sin u dv) = 0.$$

Le premier système $v = c$ est formé de courbes planes c_1, $y = x \operatorname{cotg} v$. Ce résultat peut s'obtenir en remarquant que la normale à la surface forme avec le plan $x \cos v - y \sin v = 0$ un angle α dont le cosinus est

$$\cos \alpha = \frac{f'(v)}{\sqrt{1 + f'(v)}}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = f'(v),$$

angle qui est constant pour les courbes planes $v = c$.

Le second système de lignes de courbure c_2 est déterminé par la relation :

$$\frac{du}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}} + f'(v) dv = 0$$

$$f(v) + \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{u}{2} = c, \qquad z = c + \cos u$$

cette courbe est située sur la sphère

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = 1.$$

L'angle α sera constant si

$$f'(v) = \operatorname{cotg} \alpha, \qquad f(v) = v \operatorname{cotg} \alpha + c'.$$

Les courbes c_2 sont alors définies par l'équation :

$$v \operatorname{cotg} \alpha + \mathrm{L} \operatorname{tg} \frac{u}{2} = c$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = c' e^{-v \operatorname{cotg} \alpha}.$$

183. La normale a pour équations :

$$\frac{X - x}{x^2 + a\left(\frac{y^2}{x} - x\right)} = \frac{Y - y}{y(x - 2a)} = \frac{Z - z}{zx}.$$

Elle coupe le plan $Z = 0$ au point :

$$X = a\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right), \qquad Y = 2a\frac{y}{x}$$

qui décrit la parabole

$$Y^2 = 4a(a - X).$$

Et le plan $Y = 0$, au point :

$$X = a\frac{x^2 + y^2}{x(2a - x)} = \frac{az^2}{(2a - x)^2}, \qquad Z = \frac{2az}{2a - x}$$

qui décrit la parabole

$$Z^2 = 4aX.$$

Par chacun des points de ces deux courbes passent une infinité de normales situées sur un cône, les pieds de ces normales sont donc sur une ligne de courbure. La normale au point (x, y, z) passe par le point

$$X = a(1 - t^2), \qquad Y = 2at, \qquad Z = 0$$

de la première parabole si l'on a :

$$y = tx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2ax(1 + t^2)$$

ces lignes de courbure sont des cercles, dans des plans passant par oz.

La normale passe par le point

$$X = at^2, \qquad Z = 2at, \qquad Y = 0$$

de la seconde parabole, si l'on a :

$$\frac{at^2 - x}{x^2 + a\left(\frac{y^2}{x} - x\right)} = \frac{1}{2a - x} = \frac{2at - z}{zx}$$

$$y^2 = t^2x(2a - x) - x^2, \qquad z = t(2a - x)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2at^2(2a - x)$$

ces lignes de courbure sont aussi des cercles, dont les plans passent par la droite $x = 2a$, $z = 0$.

On peut aussi obtenir ces résultats en remarquant que la surface S est l'enveloppe de chacun des deux systèmes de sphères :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax(1 - t^2) + 4aty$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2axt^2 + 4atz - 4a^2t^2.$$

Les lignes de courbure sont les cercles caractéristiques, intersections de deux sphères infiniment voisines.

184. Sur la surface S, on a :

$$dx = 3(1 + v^2 - u^2)du + 6uvdv, \qquad dy = -6uvdu + 3(v^2 - u^2 - 1)dv$$
$$dz = 6(udu - vdv)$$

$$\begin{vmatrix} dx, & 1 + v^2 - u^2, & 2uv \\ dy, & -2uv, & v^2 - u^2 - 1 \\ dz, & 2u, & -2v \end{vmatrix} = 0$$

ou, en divisant par $1 + u^2 + v^2$,

$$2(udx + vdy) + (u^2 + v^2 - 1)dz = 0.$$

Le plan tangent a pour équation :

$$2uX + 2vY + (u^2 + v^2 - 1)Z = (u^2 - v^2)(3 + u^2 + v^2).$$

2° Si $u = c$, ce plan tangent enveloppe une surface développable, dont on aura l'arrête de rebroussement en prenant deux fois les dérivées par rapport à v.

$$Y + vZ = -3v - 2v^3$$
$$Z = -3 - 6v^2.$$

Cette courbe est du quatrième ordre, on peut la représenter par les équations :

$$Z = -3 - 6v^2, \qquad Y = 4v^3, \qquad X = \frac{u^4 + 6u^2 - 3}{2u} + 3\,\frac{u^2 - 1}{u}\,v^2 - \frac{3}{2u}\,v^4$$

où v est seul variable

Si on permutte u et v, x se change en $-y$, y en $-x$ et z en $-z$. De sorte que, si $v = c$, le plan tangent enveloppe une surface dont l'arête de rebroussement est :

$$Z = 3 + 6u^2, \qquad X = -4u^3, \qquad Y = \frac{3 - 6v^2 - v^4}{2v} + 3\,\frac{1 - v^2}{v}\,u^2 + \frac{3}{2v}\,u^4$$

où u est seul variable.

3° Sur la surface S, si u et v sont variables indépendantes, on a :

$$2ud^2x + 2vd^2y + (u^2 + v^2 - 1)d^2z = -2(dudx + dvdy) - \\ - 2dz(udu + vdv).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$dudx + dvdy + (udu + vdv)dz = 0$$
$$(1 + v^2 + u^2)(du^2 - dv^2) = 0$$
$$u \pm v = c.$$

Si on pose

$$u + v = 2\alpha, \qquad u - v = 2\beta.$$

Les équations de la surface deviennent :

$$\begin{cases} x = (\alpha + \beta)(3 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 8\alpha\beta) \\ y = (\beta - \alpha)(3 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 8\alpha\beta) \\ z = 12\alpha\beta. \end{cases}$$

Les lignes asymptotiques, obtenues en supposant α ou β constant, sont des cubiques.

4° Les cosinus directeurs de la normale étant proportionnels à

$$2u, \ 2v, \qquad u^2 + v^2 - 1,$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} dx, & 2u, & du \\ dy, & 2v, & dv \\ dz, & u^2 + v^2 - 1, & udu + vdv \end{vmatrix} = 0$$

Si on remplace dx, dy, dz en fonction de u et v, les coefficients de du^2 et dv^2 sont :

$$3\begin{vmatrix} 1 + v^2 - u^2, & 2u, & 1 \\ -2uv, & 2v, & 0 \\ 2u, & u^2 + v^2 - 1, & u \end{vmatrix} = 0,$$

$$3\begin{vmatrix} 2uv, & 2u & 0 \\ v^2 - u^2 - 1, & 2v, & 1 \\ -2v, & u^2 + v^2 - 1, & v \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation des lignes de courbure se réduit à

$$dudv = 0, \qquad u = c, \qquad v = c',$$

ces courbes sont des cubiques.

5° Un point de la normale peut se représenter par les expressions :

$$X = -u^3 + 3uv^2 + 3u + 2ut$$
$$Y = v^3 - 3vu^2 - 3v + 2vt$$
$$Z = 3u^2 - 3v^2 + (u^2 + v^2 - 1)t.$$

Si u reste constant, le point (u, v) décrit une ligne de courbure, le centre de courbure correspondant s'obtient en exprimant que $dX = dY = dZ = 0$.

$$3uvdv + udt = 0$$
$$3(v^2 - u^2 - 1)dv + 2tdv + 2vdt = 0$$
$$-6vdv + 2vtdv + (u^2 + v^2 - 1)dt = 0.$$

ces trois équations se réduisent à deux :

$$3vdv + dt = 0, \qquad t = \frac{3}{2}(1 + u^2 + v^2)$$

à cette valeur de t correspond le centre de courbure :

$$X = x + 3u(1 + u^2 + v^2)$$
$$Y = y + 3v(1 + u^2 + v^2)$$
$$Z = z + \frac{3}{2}(u^2 + v^2 - 1)(1 + u^2 + v^2)$$

et le rayon de courbure

$$R = \frac{3}{2}(1 + u^2 + v^2)^2.$$

Si v est constant, on a des équations analogues, que l'on peut obtenir en permuttant u et v, et en changeant t en $-t$, de sorte que le rayon de courbure a la même valeur, mais une direction opposée.

185. La surface enveloppe s'obtient en prenant les dérivées par rapport à θ et φ. On aura les trois équations

$$x \cos\theta \cos\varphi + y \cos\theta \sin\varphi + z \sin\theta = f(\theta)$$
$$-x \sin\theta \cos\varphi - y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta = f'(\theta)$$
$$\cos\theta(y \cos\varphi - x \sin\varphi) = 0.$$

Le point de contact du plan (θ, φ) avec son enveloppe a pour coordonnées :

$$x = (f(\theta) \cos\theta - f'(\theta) \sin\theta) \cos\varphi$$
$$y = (f(\theta) \cos\theta - f'(\theta) \sin\theta) \sin\varphi$$
$$z = f(\theta) \sin\theta + f'(\theta) \cos\theta$$

ces équations, où θ et φ sont variables, représentent la surface enveloppe. La normale a pour équations :

$$\frac{X - x}{\cos\theta\cos\varphi} = \frac{Y - y}{\cos\theta\sin\varphi} = \frac{Z - z}{\sin\theta}.$$

Elle forme avec le plan xoy un angle égal à θ. Si θ est constant, z est aussi constant ; les normales aux points de cette section formant un angle constant avec son plan, c'est une ligne de courbure (problème 178).

Si φ est constant, on a une courbe située dans le plan

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.$$

La normale est située dans ce plan. Les sections $\varphi = c$ sont des lignes de courbure.

La surface est une surface de révolution autour de oz, car

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta$$

est une fonction de z. La méridienne, dans le plan $y = 0$, est l'enveloppe des droites

$$x\cos\theta + z\sin\theta = f(\theta).$$

Les lignes de courbure sont les méridiens $\varphi = c$, et les parallèles $\theta = c$.

186. Des équations données on déduit :

$$\begin{aligned}
dx &= 3(1 + v^2 - u^2)du + 6uvdv\\
dy &= 6uvdu + 3(1 + u^2 - v^2)dv\\
dz &= 6(udu - vdv)\\
2udx - 2vdy &= (1 - u^2 - v^2)dz.
\end{aligned}$$

La normale à la surface a pour équations

$$\frac{X - x}{2u} = \frac{Y - y}{-2v} = \frac{Z - z}{u^2 + v^2 - 1}.$$

Si a, b, c sont les dénominateurs, l'équation différentielle des lignes de courbure peut se mettre sous la forme :

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ a, & b, & c \\ da, & db, & dc \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1+v^2-u^2)du+2uvdv, & 2uvdu+(1+u^2-v^2)dv, & 2udu-2vdv \\ 2u & -2v & u^2+v^2-1 \\ du & -dv & udu+vdv \end{vmatrix} = 0$$

qui se réduit à

$$-2(1+u^2+v^2)^2 du dv = 0.$$

La ligne de courbure $u = c$ est dans le plan

$$x + cz = 3c + 2c^3 \text{ parallèle à } oy$$

si on pose $c = \operatorname{tg} \alpha$, ses équations peuvent s'écrire

$$x \cos \alpha + z \sin \alpha = 3 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$x \sin \alpha - z \cos \alpha = \frac{3v^2}{\cos \alpha} - \sin \alpha \operatorname{tg}^3 \alpha$$

$$y = v\left(\frac{3}{\cos^2 \alpha} - v^2\right)$$

et, en faisant tourner les axes de l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$ autour de OY, on a l'équation de la cubique, dans son plan :

$$y^2 = \left(\frac{\cos \alpha}{3}\right)^3 (X + \sin \alpha \operatorname{tg}^3 \alpha)\left(X + \sin \alpha \operatorname{tg}^3 \alpha - \frac{9}{\cos^3 \alpha}\right)^2.$$

La ligne de courbure $v = c$ est une cubique dans le plan

$$y - vz = 3v + 2v^3 \text{ parallèle à OX.}$$

187. Sur la surface $z = x^2 y$, on a ;

$$dz = 2xy dx + x^2 dy, \qquad d^2 z = 2y dx^2 + 4x dx dy.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$dx(y dx + 2x dy) = 0.$$

Les lignes asymptotiques sont les génératrices $x = c$, $z = c^2 y$, et les courbes :

$$xy^2 = c, \qquad z = x^2 y$$

qui sont des courbes unicursales du quatrième ordre, situées sur les paraboloïdes $yz = cx$.

2° Le plan tangent au point (a, b, c) a pour équation :

$$z - 2abx - a^2 y + 2a^2 b = 0.$$

La projection de l'intersection sur le plan xoy

$$(x^2 - a^2)y + 2ab(a - x) = 0$$

se décompose, l'intersection est formée de la droite

$$x = a, \qquad z = a^2 y$$

et de l'hyperbole dont la projection est $(x + a)y = 2ab$, que l'on peut représenter par les équations :

$$x = \frac{2ab}{y} - a, \qquad z = a^2 y - 4a^2 b + \frac{4a^2 b^2}{y}.$$

En considérant x et z comme des fonctions de y, on a :

$$x' = -\frac{2ab}{y^2}, \qquad y' = 1, \qquad z' = a^2 - \frac{4a^2 b^2}{y^2}$$

$$x'' = \frac{4ab}{y^3}, \qquad y'' = 0, \qquad z'' = \frac{8a^2 b^2}{y^3}$$

$$x'y'' - y'x'' = -\frac{4ab}{y^3}, \quad y'z'' - z'y'' = \frac{8a^2 b^2}{y^3}, \quad z'x'' - x'z'' = \frac{4a^3 b}{y^3}.$$

Si on représente la courbure par $\frac{1}{R}$, on a :

$$R^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{\Sigma(x'y'' - y'x'')^2} = \frac{\left(1 + \frac{4a^2b^2}{y^4} + a^4\left(1 - \frac{4b^2}{y^2}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{4ab}{y^3}\right)^2 (1 + 4a^2b^2 + a^4)}$$

$$= \frac{4a^4b^4}{1 + 4a^2b^2 + a^4}\left(\frac{1 + a^4}{4a^2b^2}y^2 - 2a^2 + \frac{1 + 4a^2b^2}{y^2}\right)^3.$$

3° On a :

$$p = 2xy, \qquad q = x^2.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

$$(dx + 2xydz)xdx = (dy + x^2dz)(xdy + ydx)$$

$$xdx^2 - ydxdy - xdy^2 = x^2(xdy - ydx)dz = x^2(xdy - ydx)(2ydx + xdy)$$

$$x(1 + 2x^2y^2)dx^2 - y(1 + x^4)dxdy - x(1 + x^4)dy^2 = 0$$

$$dz = 2xydx + x^2dy.$$

En un point (x, o, o) de la génératrice $y = 0$, $z = 0$, les directions principales sont déterminées par les relations

$$dx^2 = (1 + x^4)dy^2, \qquad dz = x^2dy$$

Les cosinus directeurs sont proportionnels à dx, dy, dz.

$$\frac{\alpha}{\pm\sqrt{1+x^4}} = \frac{\beta}{1} = \frac{\gamma}{x^2} = \frac{1}{\pm\sqrt{2(1+x^4)}}.$$

Les cosinus directeurs des deux directions principales sont :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2(1+x^4)}}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{2(1+x^4)}}$$
$$\frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2(1+x^4)}}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{2(1+x^4)}}.$$

188. Un point de la droite Δ qui joint les points $A(u, 2v, 0)$, $B(-u, 0, 2w)$ de D et D_1, a pour coordonnées :

$$x = u - 2ut$$
$$y = 2v - 2vt$$
$$z = 2wt$$

A et B correspondent aux valeurs $t = 0$, et $t = 1$, du paramètre.

1° Ce point est sur la surface si l'on a :

$$u^2(1-2t)^3 + 4v^2(1-2t)(1-t)^2 + 4w^2(1-2t)t^2 + 4w^2t^2$$
$$- 4v^2(1-t)^2 - u^2(1-2t) = 0$$
$$4t(1-t)\left[2w^2t - 2v^2(1-t) - u^2(1-2t)\right] = 0.$$

La droite Δ coupe la surface aux points A et B, $t = 0$ et 1, et en un autre point C :

$$t = \frac{u^2 + 2v^2}{2(u^2 + v^2 + w^2)}$$

$$x = u\,\frac{w^2 - v^2}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad y = v\,\frac{u^2 + 2w^2}{u^2 + v^2 + w^2}, \quad z = w\,\frac{u^2 + 2v^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

2° Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$3x^2 + y^2 + z^2 - u^2, \qquad 2y(x-u), \qquad 2z(x+u).$$

Au point C on a :

$$3x^2+y^2+z^2-u^2 = \frac{3u^2(w^2-v^2)^2 + v^2(u^2+2w^2)^2 + w^2(u^2+2v^2)^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} - u^2$$
$$= \frac{(u^2+2v^2)(u^2+2w^2)(-u^2+v^2+w^2)}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

$$2y(x-u) = \frac{-2uv(u^2+2w^2)(u^2+2v^2)}{(u^2+v^2+w^2)^2}$$

$$2z(x+u) = \frac{2uw(u^2+2v^2)(u^2+2w^2)}{(u^2+v^2+w^2)^2}.$$

Les cosinus directeurs de la normale au point C sont :

$$\frac{v^2 + w^2 - u^2}{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad \frac{-2uv}{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad \frac{2uw}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Les points de la section par le plan DΔ s'obtiennent en supposant w constant, et v seul variable, on a alors des droites Δ passant par le point fixe B.

Le plan BD a pour équation

$$(x - u)w + uz = 0,$$

la normale à ce plan, dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}}, \quad 0, \quad \frac{u}{\sqrt{u^2 + w^2}}$$

forme, avec la normale à la surface, un angle V dont le cosinus est :

$$\cos V = \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}}.$$

Cet angle est constant pour tout point de la section, il ne dépend pas de la variable v.

3° Il en résulte que les sections par des plans passant par la droite D sont des lignes de courbure de la surface.

Le même résultat s'applique à la droite D_1, car les formules ne changent pas si on permutte v et w, y et z, en changeant u en $-u$. Le plan AD_1 a pour équation $(x + u)v - uy = 0$, sa normale, dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad 0,$$

forme avec la normale à la surface un angle dont le cosinus est

$$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

si v est constant, la section par le plan AD_1 est une ligne de courbure.

4° Supposons w constant. Des expressions de x, y, z on déduit

$$(x - u)w + uz = 0, \quad \text{plan BD},$$

et :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{u^2(w^2 - v^2)^2 + v^2(u^2 + 2w^2)^2 + w^2(u^2 + 2v^2)^2}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} =$$

$$= \frac{v^2(u^2 + 4w^2) + u^2w^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

De cette expression et de celles de x et z, on déduit, en éliminant v :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2wz - ux$$

sphère qui coupe le plan suivant un cercle.

En permuttant y et z, on a, pour les sections par les plans passant par D_1, les cercles :

$$(x + u)v - uy = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2vy + ux.$$

189. Lorsque v est constant, le point $M'(x, y, z)$ décrit une courbe; pour $u = 0$, on aura $\varphi(o, v) = 0$ pour que la courbe passe par $A(r, o, o)$. On a :

$$s = \int_0^u r\sqrt{1 + \varphi_u'^2}\, du.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\frac{-\sin u}{\sqrt{1 + \varphi_u'^2}}, \qquad \frac{\cos u}{\sqrt{1 + \varphi_u'^2}}, \qquad \frac{\varphi_u'}{\sqrt{1 + \varphi_u'^2}}.$$

Le point M a pour coordonnées :

$$X = r\cos u - \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \varphi_u'^2}}(l - s)$$

$$Y = r\sin u + \frac{\cos u}{\sqrt{1 + \varphi_u'^2}}(l - s)$$

$$Z = r\varphi(u, v) + \frac{\varphi_u'}{\sqrt{1 + \varphi_u'}}(l - s).$$

Si u varie seul, ce point décrit la courbe D, si u et v sont variables, il engendre la surface Σ.

1° La courbe C est une hélice, passant par A, si $\varphi = uf(v)$; en choisissant la variable v, ce qui ne change pas les surfaces engendrées, on peut supposer

$$\varphi(u, v) = uv.$$

On a alors :

$$s = r\sqrt{1 + v^2}\, u$$

en choisissant $u_0 = 0$; et :

$$X = r \cos u - \sin u\left(\frac{l}{\sqrt{1 + v^2}} - ru\right)$$

$$Y = r \sin u + \cos u\left(\frac{l}{\sqrt{1 + v^2}} - ru\right)$$

$$Z = \frac{vl}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

Si u et v sont variables, on aura, sur cette surface :

$$dX = \left(ru - \frac{l}{\sqrt{1 + v^2}}\right) \cos u\,du + \frac{vl \sin u}{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}\, dv$$

$$dY = \left(ru - \frac{l}{\sqrt{1 + v^2}}\right) \sin u\,du - \frac{vl \cos u}{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}\, dv$$

$$dZ = \frac{l}{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}\, dv$$

$$-\sin u\,dX + \cos u\,dY + v\,dZ = 0.$$

Ce qui montre que le plan tangent est perpendiculaire à la droite MM′, dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $-\sin u$, $\cos u$, v. L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} -\sin u & -\cos u\,du & dX \\ \cos u & -\sin u\,du & dY \\ v & dv & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant dX, dY, dZ par leurs valeurs, il est facile de voir que les termes du^2 et dv^2 disparaissent, et que l'équation se réduit à $du\,dv = 0$. Les lignes de courbure $v = C$ sont des développantes du cercle de rayon r, dans des plans parallèles au plan xoy ; ce sont des courbes égales, qui coupent le plan $x = r$ (pour $u = 0$) au point

$$Y = \frac{l}{\sqrt{1 + v^2}}, \qquad Z = \frac{vl}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

ces courbes s'appuyent ainsi sur le cercle $Y^2 + Z^2 = l^2$. Si $u = C$, on a :

$$(X - r\cos u - ru\sin u)^2 + (Y - r\sin u + ru\cos u)^2 + Z^2 = l^2$$
$$Y\sin u + X\cos u = r.$$

Ces lignes de courbure sont des circonférences de rayon l constant, dans les plans tangents au cylindre. Le centre du cercle

$$X = r(\cos u + u\sin u), \qquad Y = r(\sin u - u\cos u), \qquad Z = 0$$

décrit la développante du cercle de base du cylindre, qui passe par le point A, $u = 0$ (r, o, o).

2° La courbe C est une développée de la courbe D. Toute courbe D a une infinité de développées, que l'on peut former en menant dans le plan normal une droite formant avec la tangente MM′ à l'une des développées un angle constant. Si cette droite est normale à la surface lieu de D, comme elle engendrera une surface développable, D sera une ligne de courbure. Inversement si D est une ligne de courbure, les normales aux points M de D engendrent une surface développable, et sont tangentes à une courbe qui est une développée de D. Il faut donc qu'elles forment avec la droite MM′, tangente à la développée C de D, un angle constant. Cet angle, qui est fixe pour chaque courbe D, peut varier avec la courbe D.

190. On a :

$$dx = a(du + dv), \qquad dy = b(du - dv),$$
$$dz = c(udv + vdu)$$
$$\begin{vmatrix} dx, & a, & a \\ dy, & b, & -b \\ dz, & cv, & cu \end{vmatrix} = 0$$
$$bc(u + v)dx + ac(v - u)dy - 2abdz = 0$$

les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$bc(u + v), \qquad ac(v - u), \qquad -2ab.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} bc(u + v), & bc(du + dv), & dx \\ ac(v - u), & ac(dv - du), & dy \\ -2ab, & 0, & dz \end{vmatrix} = 0$$
$$adx(dv - du) - bdy(du + dv) + cdz(udv - vdu) = 0$$

et, en remplaçant dx, dy, dz en fonction de du et dv :

$$(a^2 + b^2)(dv^2 - du^2) + c^2(u^2dv^2 - v^2du^2) = 0$$
$$(1 + u^2)dv^2 = (1 + v^2)du^2$$
$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \pm \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$
$$L(v + \sqrt{1 + v^2}) = L(u \pm \sqrt{1 + u^2}) + LK$$
$$v + \sqrt{1 + v^2} = K(u \pm \sqrt{1 + u^2})$$
$$(v - Ku)^2 = 1 + v^2 + K^2(1 + u^2) \pm 2K\sqrt{1 + u^2}\sqrt{1 + v^2}$$
$$(1 + K^2 + 2Kuv)^2 = 4K^2(1 + u^2 + v^2 + u^2v^2)$$
$$(1 - K^2)^2 + 4K(1 + K^2)uv - 4K^2(u^2 + v^2) = 0$$

et, comme

$$2u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad 2v = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$(1 - K^2)^2 + K(1 + K^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - 2K^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{K}{(1 + K)^2} - \frac{y^2}{b^2}\frac{K}{(1 - K)^2} + 1 = 0$$

ou, en posant $K + \frac{1}{K} = \lambda$

$$\frac{x^2}{a^2(\lambda + 2)} - \frac{y^2}{b^2(\lambda - 2)} + 1 = 0.$$

Système d'hyperboles. Car si $-2 < \lambda < 2$ ce sont des ellipses imaginaires. Il faut donc supposer $\lambda^2 > 4$. Par tout point du plan passent deux hyperboles, si x et y sont donnés, on a pour λ deux valeurs comprises, l'une entre $-\infty$ et -2, l'autre entre 2 et $+\infty$. Les deux systèmes de lignes de courbure correspondent aux valeurs positives et négatives de λ.

191. Considérons le système de surfaces :

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda}$$

où λ a une valeur arbitraire. Par tout point de l'espace passent trois surfaces réelles; car, si (x, y, z) est un point donné, l'équation qui est du troisième degré en λ donne trois surfaces passant par ce point. Si $a > b > c$, lorsque λ varie de $-a$ à $-b$,

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda}$$

varie de $+\infty$ à $-\infty$.

L'équation (1) a une racine λ entre $-a$ et $-b$, une entre $-b$ et $-c$, et une entre $-c$ et $+\infty$. Soit une seconde surface

$$(2)\quad (x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{x^2}{a+\mu} + \frac{y^2}{b+\mu} + \frac{z^2}{c+\mu}, \qquad \mu - \lambda \lesseqgtr 0.$$

Si x, y, z est un point commun aux deux surfaces, on aura :

$$x^2\left(\frac{1}{a+\lambda} - \frac{1}{a+\mu}\right) + y^2\left(\frac{1}{b+\lambda} - \frac{1}{b+\mu}\right) + z^2\left(\frac{1}{c+\lambda} - \frac{1}{c+\mu}\right) = 0$$

$$\frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} + \frac{y^2}{(b+\lambda)(b+\mu)} + \frac{z^2}{(c+\lambda)(c+\mu)} = 0.$$

Il en résulte que les plans tangents aux deux surfaces sont rectangulaires. En effet les cosinus directeurs de la normale à la surface (1) sont proportionnels aux dérivées partielles :

$$x\left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2(a+\lambda)}\right), \qquad y\left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2(b+\lambda)}\right),$$
$$z\left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2(c+\lambda)}\right).$$

Pour la surface (2) il suffit de changer λ en μ. Pour exprimer que les deux plans tangents sont perpendiculaires, on a la relation :

$$\Sigma x^2\left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2(a+\lambda)}\right)\left(x^2+y^2+z^2 - \frac{1}{2(a+\mu)}\right) = 0$$

$$(x^2+y^2+z^2)^3 - (x^2+y^2+z^2)\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{x^2}{a+\mu}\right) + \frac{1}{4}\Sigma\frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} = 0.$$

Mais les équations (1) et (2) donnent

$$\Sigma\frac{x^2}{a+\lambda} = \Sigma\frac{x^2}{a+\mu} = (x^2+y^2+z^2)^2$$

et l'équation se réduit à

$$\Sigma\frac{x^2}{(a+\lambda)(a+\mu)} = 0$$

qui est vérifiée pour tout point de l'intersection.

Par chaque point de l'espace passent trois surfaces qui se coupent deux à deux à angle droit. D'après le théorème de Dupin elles se coupent suivant leurs lignes de courbure.

En particulier, les lignes de courbure de la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

sont les intersections avec les surfaces (1), ou encore avec les cônes du second degré

$$\frac{x^2}{a(a+\lambda)} + \frac{y^2}{b(b+\lambda)} + \frac{z^2}{c(c+\lambda)} = 0.$$

Si on suppose $a > b > c > 0$, la valeur $\lambda = 0$ étant comprise entre $-c$ et $+\infty$, l'un des systèmes de lignes de courbure correspond aux valeurs de λ comprises entre $-a$ et $-b$, l'autre aux valeurs comprises entre $-b$ et $-c$.

CHAPITRE VIII

—

SURFACES RÉGLÉES

192. L'enveloppe du plan P est une surface développable définie par l'équation du plan P et sa dérivée par rapport au paramètre u :

$$18u^2x + y - 6uz = 3u^4$$
$$6ux - z = 2u^3.$$

En prenant encore la dérivée, on a $x = u^2$, ces trois équations déterminent l'arête de rebroussement

$$x = u^2, \qquad y = 9u^4, \qquad z = 4u^3$$

Sur cette courbe, on a :

$$dx = 2udu, \qquad dy = 36u^3du, \qquad dz = 12u^2du$$
$$ds = 2udu\sqrt{1 + 36u^2 + 18^2u^4} = (1 + 18u^2)2udu$$

les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$a = \frac{1}{1 + 18u^2}, \qquad b = \frac{18u^2}{1 + 18u^2}, \qquad c = \frac{6u}{1 + 18u^2}$$

$a + b = 1$, la tangente forme un angle constant avec la droite $z = 0$, $x = y$; la courbe est une hélice tracée sur un cylindre parallèle à cette droite.

Une génératrice de la surface développable a pour équations :

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 9u^4}{18u^2} = \frac{z + 2u^3}{6u}$$

où u est constant.

Une courbe tracée sur la surface sera représentée par

$$y = 18u^2x - 9u^4. \qquad z = 6ux - 2u^3$$

où u et x sont variables.

$$dy = 18u^2dx + 36u(x - u^2)du, \qquad dz = 6udx + 6(x - u^2)du$$

cette courbe est perpendiculaire à la génératrice en un point (u, x) si :

$$dx + 18u^2dy + 6udz = 0$$
$$(1 + 18u^2)^2dx + 36u(x - u^2)(1 + 18u^2)du = 0$$
$$(1 + 18u^2)dx + 36u(x - u^2)du = 0$$
$$dx - 36u^3du + 18(u^2dx + 2xudu) = 0$$
$$x - 9u^4 + 18u^2x = c$$

cette courbe, trajectoire orthogonale des génératrices, est définie par les équations :

$$x = \frac{c + 9u^4}{1 + 18u^2}, \qquad y = \frac{18cu^3 - 9u^4}{1 + 18u^2}, \qquad z = \frac{6cu - 2u^3 + 18u^5}{1 + 18u^2}$$

où u est un paramètre variable. Elle est dans le plan $x + y = c$, perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

193. Une droite passant par un point de la parabole, et formant l'angle α avec oz, a des équations de la forme :

$$\frac{X - \frac{y^2}{2p}}{\sin\alpha\cos t} = \frac{Y - y}{\sin\alpha\sin t} = \frac{Z}{\cos\alpha}$$

cette droite engendrera une surface, si y est une fonction de t. On peut écrire ces équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \frac{y^2}{2p} + Z\operatorname{tg}\alpha\cos t \\ Y = y + Z\operatorname{tg}\alpha\sin t \end{cases}$$

cette surface réglée sera développable si les coefficients $\frac{y^2}{2p}$, y et $\operatorname{tg}\alpha\cos t$, $\operatorname{tg}\alpha\sin t$, ont leurs dérivées, par rapport à t, proportionnelles :

$$\frac{yy'}{py'} = \frac{y}{p} = -\operatorname{tg} t$$

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \frac{p}{2}\operatorname{tg}^2 t + Z\operatorname{tg}\alpha\cos t \\ Y = -p\operatorname{tg} t + Z\operatorname{tg}\alpha\sin t. \end{cases}$$

Si t reste constant, dans les équations (1), y étant seul variable, la droite (1) engendre le cylindre parabolique

$$(Y - Z\sin t\operatorname{tg}\alpha)^2 = 2p(X - Z\cos t\operatorname{tg}\alpha).$$

On aura l'enveloppe de ces cylindres en formant la dérivée par rapport à t, et l'on obtient deux équations équivalentes au sys-

tème (2), qui représente la surface développable S, enveloppe des cylindres.

Les génératrices (2), où t est constant, forment un système de lignes de courbure.

Le plan tangent en un point de la surface développable (2), qui est aussi tangent au cylindre parabolique, a pour équation :

$$(X - x) \cos t + (Y - y) \sin t - (Z - z) \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Il forme avec le plan XOY un angle constant $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Il en résulte que les sections planes $Z = c$ sont des lignes de courbure. Car, pour ces courbes, on a :

$$dz = pdx + qdy = 0, \qquad p^2 + q^2 = \operatorname{cotg}^2 \alpha, \qquad pdp + qdq = 0.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

est vérifiée.

194. La droite

$$x = z \cos \alpha + e^{\frac{\alpha^2}{2}} \cos \alpha - v \sin \alpha$$
$$y = z \sin \alpha + e^{\frac{\alpha^2}{2}} \sin \alpha + v \cos \alpha.$$

engendre une surface développable, si les dérivées, par rapport à α, des coefficients sont proportionnelles

$$\frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{e^{\frac{\alpha^2}{2}} (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) - v \cos \alpha - v' \sin \alpha}{e^{\frac{\alpha^2}{2}} (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha) - v \sin \alpha + v' \cos \alpha}$$

équation qui se réduit à :

$$v = \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}}$$

on a alors, sur cette surface développable :

$$dx = \cos \alpha dz - [z + e^{\frac{\alpha^2}{2}} (2 + \alpha^2)] \sin \alpha d\alpha$$
$$dy = \sin \alpha dz + [z + e^{\frac{\alpha^2}{2}} (2 + \alpha^2)] \cos \alpha d\alpha$$
$$dz = \cos \alpha dx + \sin \alpha dy.$$

Le plan tangent en un point, défini par les valeurs de α et z, a pour équation :

$$Z = X \cos \alpha + Y \sin \alpha - e^{\frac{\alpha^2}{2}}.$$

L'enveloppe de ce plan est la surface développable.

L'arête de rebroussement s'obtient en prenant deux fois les dérivées par rapport à α.

$$-X \sin \alpha + Y \cos \alpha - \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}} = 0,$$

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha + e^{\frac{\alpha^2}{2}} (1 + \alpha^2) = 0.$$

En résolvant ces trois équations par rapport à X, Y, Z, on a :

$$\begin{cases} X = -e^{\frac{\alpha^2}{2}} [\alpha \sin \alpha + (1 + \alpha^2) \cos \alpha] \\ Y = e^{\frac{\alpha^2}{2}} [\alpha \cos \alpha - (1 + \alpha^2) \sin \alpha] \\ Z = -e^{\frac{\alpha^2}{2}} (2 + \alpha^2) \end{cases}$$

on en déduit :

$$dX = -e^{\frac{\alpha^2}{2}} \alpha(4 + \alpha^2) \cos \alpha d\alpha$$

$$dY = -e^{\frac{\alpha^2}{2}} \alpha(4 + \alpha^2) \sin \alpha d\alpha, \qquad dZ = -e^{\frac{\alpha^2}{2}} \alpha(4 + \alpha^2).$$

Il en résulte que la tangente à cette courbe forme avez oz un angle égal à $\frac{\pi}{4}$. L'arête de rebroussement est une hélice, tracée sur un cylindre parallèle à oz.

2° La normale en un point de la surface a pour équations

$$\frac{X - x}{\cos \alpha} = \frac{Y - y}{\sin \alpha} = \frac{Z - z}{-1}$$

ses cosinus directeurs sont

$$\frac{-\cos \alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-\sin \alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La relation

$$dz = \cos \alpha dx + \sin \alpha dy$$

donne, pour les dérivées partielles de z :

$$p = \cos\alpha, \qquad q = \sin\alpha$$

où α, de même que z, est fonction de x et y, donnée par la relation

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\cos\alpha dy - \sin\alpha dx = [y\sin\alpha + x\cos\alpha + e^{\frac{\alpha^2}{2}}(1+\alpha^2)]d\alpha =$$
$$= [z + e^{\frac{\alpha^2}{2}}(2+\alpha^2)]d\alpha.$$

Les dérivées secondes de z, par rapport à x^2, xy, y^2, sont :

$$r = \frac{dp}{dx} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\sin^2\alpha}{z + (2+\alpha^2)e^{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

$$s = \frac{dp}{dy} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{z + (2+\alpha^2)e^{\frac{\alpha^2}{2}}}$$

$$t = \frac{dq}{dy} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\cos^2\alpha}{z + (2+\alpha^2)e^{\frac{\alpha^2}{2}}}.$$

Elles vérifient l'équation différentielle, $rt = s^2$, des surfaces développables. La relation $q = f(p)$, qui ici se réduit à $p^2 + q^2 = 1$, conduit au même résultat.

3° L'équation différentielle des lignes de courbure

$$(dx + pdz)dq = (dy + qdz)dp$$

devient :

$$(dx + \cos\alpha dz)\cos\alpha d\alpha + (dy + \sin\alpha dz)\sin\alpha d\alpha = 0$$

et se réduit à

$$2dzd\alpha = 0.$$

Les lignes de courbure sont les génératrices $\alpha = c$, et les sections planes $z = c$.

Les rayons de courbure principaux sont donnés par l'équation :

$$(rt - s^2)R^2 - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,R + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$

comme $rt = s^2$, le rayon de courbure correspondant à la direction de la génératrice est infini, l'autre est :

$$R = \sqrt{2}\left[z + (2+\alpha^2)e^{\frac{\alpha^2}{2}}\right].$$

195. $dx = \cos\omega d\rho - \rho\sin\omega d\omega, \qquad dy = \sin\omega d\rho + \rho\cos\omega d\omega$

$\rho d\omega = \cos\omega dy - \sin\omega dx, \qquad d\rho = \sin\omega dy + \cos\omega dx$

$$\varphi'(z)dz = ad\omega + f'(\rho)d\rho = \frac{a}{\rho}(\cos\omega dy - \sin\omega dx) + f'(\rho)(\sin\omega dy + \cos\omega dx),$$

La normale au point (ρ, ω) de la surface, a pour équations :

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

où

$$p\varphi'(z) = f'(\rho)\cos\omega - \frac{a}{\rho}\sin\omega$$

$$q\varphi'(z) = f'(\rho)\sin\omega + \frac{a}{\rho}\cos\omega.$$

Les coordonnées du point n sont, dans le plan xoy :

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz,$$

celles de m sont, (x, y).

L'aire du triangle omn est

$$\frac{1}{2}(xY - yX) = \frac{z}{2}(qx - py) = \frac{az}{2\varphi'(z)}.$$

Pour qu'elle soit proportionnelle à z, il faut que $\varphi'(z)$ soit constant

$$\varphi(z) = b(z - c), \qquad z = \frac{a}{b}\omega + c + \frac{1}{b}f(\rho),$$

Mais on peut supposer $b = 1$, a étant une constante arbitraire, et $f(\rho)$ une fonction quelconque.

2° Si $\varphi(z) = z$, on a :

$$dz = ad\omega + f'(\rho)d\rho, \qquad \rho^2 d\omega = xdy - ydx, \qquad \rho d\rho = xdx + ydy$$

Si x et y sont variables indépendantes,

$$d^2x = 0, \qquad d^2y = 0$$

$$\rho^2 d^2\omega = -2\rho d\rho d\omega, \qquad \rho d^2\rho = dx^2 + dy^2 - d\rho^2 = \rho^2 d\omega^2$$

$$d^2z = ad^2\omega + f'(\rho)d^2\rho + f''(\rho)d\rho^2 = \rho f'(\rho)d\omega^2 - \frac{2a}{\rho}d\rho d\omega + f''(\rho)d\rho^2.$$

En égalant d^2z à zéro, on a l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$d\omega = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - \rho^3 f'(\rho)f''(\rho)}}{\rho^2 f'(\rho)}d\rho.$$

En tout point d'une surface développable les directions asymptotiques sont confondues, ce qui donne la condition :

$$f'(\rho)f''(\rho) = \frac{a^2}{\rho^3}, \qquad f'(\rho)^2 = c^2 - \frac{a^2}{\rho^2}$$

$$f'(\rho) = \frac{1}{\rho}\sqrt{c^2\rho^2 - a^2} = \frac{c^2\rho}{\sqrt{c^2\rho^2 - a^2}} - a\frac{\frac{a}{c\rho^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{c\rho}\right)^2}}$$

$$f(\rho) = \sqrt{c^2\rho^2 - a^2} + a \arcsin\frac{a}{c\rho} + b.$$

On arriverait au même résultat en exprimant que p est fonction de q, ou qu'en éliminant ω entre les expressions de p et q la relation

$$p^2 + q^2 = f'(\rho)^2 + \frac{a^2}{\rho^2}$$

ne doit plus contenir ρ, de sorte que $f'^2 + \frac{a^2}{\rho^2}$ est constant.

3° La surface développable est représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega \\ z = a\omega + \sqrt{c^2\rho^2 - a^2} + a\arcsin\frac{a}{c\rho} + b \end{cases}$$

$$p = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{\rho^2}}\cos\omega - \frac{a}{\rho}\sin\omega$$

$$q = \sqrt{c^2 - \frac{a^2}{\rho^2}}\sin\omega + \frac{a}{\rho}\cos\omega$$

$$p^2 + q^2 = c^2.$$

Posons

$$p = c\cos\alpha, \qquad q = c\sin\alpha$$

on en déduit :

$$c\sin(\alpha - \omega) = q\cos\omega - p\sin\omega = \frac{a}{\rho}$$

$$\alpha = \omega + \arcsin\frac{a}{c\rho}.$$

L'équation du plan tangent, $pX + qY - Z = px + qy - z$, devient :

$$cX\cos\alpha + cY\sin\alpha - Z = c\rho\cos(\alpha - \omega) - z = \sqrt{c^2\rho^2 - a^2} - z = -a\alpha - b.$$

La surface, enveloppe de ce plan, s'obtient en prenant la dérivée :

$$(2) \qquad cX\sin\alpha - cY\cos\alpha = a.$$

Ces deux équations, qui représentent une génératrice lorsque α est constant, peuvent s'écrire :

$$\frac{cX - a\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{cY + a\cos\alpha}{\sin\alpha} = Z - a\alpha - b$$

elles sont équivalentes aux équations (1), où ω est remplacé en fonction de α, et $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cette génératrice forme avec oz un angle dont le cosinus est $\frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$, et dont la cotangente est c. Le plan (2) passe par la génératrice, il est parallèle à oz. La plus courte distance des deux droites, distance de o au plan (2), est égale à $\frac{a}{c}$, quantité constante. L'arête de rebroussement de la surface est l'hélice

$$X = \frac{a}{c}\sin\alpha, \qquad Y = -\frac{a}{c}\cos\alpha, \qquad Z = a\alpha + b.$$

196. Le cône et le plan P ont pour équations :

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\alpha, \qquad y = (x - a)\operatorname{tg}\alpha$$

où a est constant, α variable. L'élimination de $\operatorname{tg}\alpha$ donne l'équation de la surface :

$$z^2y^2 = (x^2 + y^2)(x - a)^2.$$

Cette surface est engendrée par la droite

$$z = t(x - a), \qquad y = \frac{x}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

où le radical peut être pris avec le signe $\pm$. Une génératrice, pour laquelle t est constant, a ses cosinus directeurs proportionnels à

$$1, \qquad \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \qquad t.$$

Si t et x sont variables, on a :

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{xtdt}{(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - 1}}, \qquad dz = tdx + (x - a)dt.$$

Une courbe de la surface sera perpendiculaire à la génératrice

au point (t, x), si l'on a :

$$dx + \frac{dy}{\sqrt{t^2 - 1}} + t dz = 0$$

$$\frac{t^4}{t^2 - 1} dx + \left(x t^2 \frac{t^2 - 2}{(t^2 - 1)^2} - a\right) t dt = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} \cdot \frac{x}{t} = a \frac{t^2 - 1}{t^3}.$$

Equation linéaire ; si le second membre était nul, on aurait

$$\frac{dx}{x} = dt \left(-\frac{2}{t} + \frac{t}{t^2 - 1}\right), \qquad \mathrm{L}x = \frac{1}{2} \mathrm{L}(t^2 - 1) - 2\mathrm{L}t + c.$$

Si on pose, dans l'équation complète :

$$x = \frac{u}{t^2} \sqrt{t^2 - 1},$$

elle devient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{a}{t} \sqrt{t^2 - 1} = \frac{at}{\sqrt{t^2 - 1}} - \frac{a}{t^2 \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}}$$

$$u = a \left(\sqrt{t^2 - 1} + \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{t}\right) + c$$

$$x = \frac{c}{t^2} \sqrt{t^2 - 1} + \frac{a}{t^2} \left(t^2 - 1 + \sqrt{t^2 - 1} \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{t}\right)$$

et comme

$$t^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2},$$

on a :

$$x^2 + y^2 = cy + a \left(x + y \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right).$$

197. Une surface réglée est engendrée par une droite :

(1) $$x = \alpha z + p, \qquad y = \beta z + q$$

où α, β, p, q sont des fonctions d'une variable t. Pour une courbe de la surface, on a :

$$dx = \alpha dz + (\alpha' z + p') dt$$
$$dy = \beta dz + (\beta' z + q') dt.$$

En un point de la surface, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à la génératrice (1), si l'on a :

$$\alpha dx + \beta dy + dz = 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + 1) dz + (\alpha\alpha' z + \beta\beta' z + \alpha p' + \beta q') dt = 0$$

(2) $$(\alpha^2 + \beta^2 + 1) \frac{dz}{dt} + (\alpha\alpha' + \beta\beta') z + \alpha p' + \beta q' = 0.$$

Equation linéaire, qui détermine z en fonction de t.

L'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est engendré par la droite

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$x = \frac{az}{c}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + a\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \qquad y = \frac{bz}{c}\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} - b\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

ou, en posant $\lambda = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$:

$$x = \frac{a}{c}\,z\cos t + a\sin t, \qquad y = \frac{b}{c}\,z\sin t - b\cos t.$$

L'équation (2) devient :

$$(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + c^2)\frac{dz}{dt} + (b^2 - a^2)\sin t\cos t\,z +$$
$$+ (a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\,c = 0.$$

Si l'hyperboloïde est de révolution $b = a$, cette équation devient :

$$\frac{dz}{dt} + \frac{a^2c}{a^2+c^2} = 0$$

dont l'intégrale est

$$z = -\frac{a^2ct}{a^2+c^2} + \lambda\frac{c}{a}$$

où λ est une constante arbitraire. La projection de ces trajectoires orthogonales des génératrices sur le plan xoy est représentée par les équations :

$$x = a\sin t + \left(\lambda - \frac{a^3t}{a^2+c^2}\right)\cos t, \qquad y = -a\cos t + \left(\lambda - \frac{a^3t}{a^2+c^2}\right)\sin t.$$

Si on pose $X = x\sin t - y\cos t = a$

$$Y = x\cos t + y\sin t = \lambda - \frac{a^3t}{a^2+c^2}$$

X, Y sont les coordonnées du point (x, y), après que les axes ont tourné de l'angle $t - \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que le point (xy) peut être considéré comme relié invariablement à une droite d'un plan mo-

bile qui roule sans glisser sur une circonférence de rayon $\frac{a^3}{a^2+c^2}$.

198. Les courbes c sont représentées par les équations :

$$(1) \qquad x = cz^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \qquad y = c'z^{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Une surface est normale à la courbe c en un point (x, y, z) si l'on a :

$$\frac{p}{\alpha x} = \frac{q}{\beta y} = \frac{-1}{\gamma z}, \qquad \text{ou} \qquad \gamma z dz = -\alpha x dx - \beta y dy$$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = c$$

Par tout point de l'espace passe une surface de ce système, et la normale en ce point a ses cosinus directeurs proportionnels à αx, βy, γz.

2° En exprimant que la courbe (1) rencontre une courbe D, on aura une relation entre c et c', et en éliminant c et c' on aura l'équation de la surface S engendrée. Soit la droite D :

$$x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

La courbe (1) rencontre cette droite si, pour une valeur $z = t$, on a :

$$at + p = ct^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \qquad bt + q = c't^{\frac{\beta}{\gamma}}$$

si on exprime c et c' en fonction de t, la surface S sera représentée par les équations :

$$x = (at + p)\left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \qquad y = (bt + q)\left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}}$$

ou, en posant $z = t\theta^{\gamma}$:

$$\begin{cases} x = a\theta^{\alpha-\gamma}z + p\theta^{\alpha} \\ y = b\theta^{\beta-\gamma}z + q\theta^{\beta} \end{cases}$$

La surface S est engendrée par ces droites, lorsque θ varie. Elle est développable si les dérivées, par rapport à θ, des quatre coefficients, sont proportionnelles.

$$\frac{a(\alpha-\gamma)\theta^{\alpha-\gamma-1}}{b(\beta-\gamma)\theta^{\beta-\gamma-1}} = \frac{p\alpha\theta^{\alpha-1}}{q\beta\theta^{\beta-1}}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\alpha(\beta-\gamma)b}{\beta(\alpha-\gamma)a}.$$

Les équations de la droite D peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x = az + a\beta(\alpha - \gamma)c \\ y = bz + b\alpha(\beta - \gamma)c \end{cases}$$

a, b, c pouvant être arbitraires, ces droites forment un complexe du second degré. La droite

$$x = a\theta^{\alpha-\gamma}z + ac\beta(\alpha - \gamma)\theta^{\alpha}$$
$$y = b\theta^{\beta-\gamma}z + bc\alpha(\beta - \gamma)\theta^{\beta}$$

engendre une surface développable, lorsque θ varie. En prenant les dérivées par rapport à θ, on a deux relations équivalentes,

$$z + c\alpha\beta\theta = 0.$$

L'arête de rebroussement est ainsi représentée par les équations :

$$x = -ac\beta\gamma\theta^{\alpha}, \qquad y = -bc\alpha\gamma\theta^{\beta}, \qquad z = -c\alpha\beta\theta^{\gamma}.$$

3° Soit la courbe directrice D, représentée par les équations :

$$x = az^{\frac{\alpha'}{\gamma'}}, \qquad y = bz^{\frac{\beta'}{\gamma'}}.$$

La courbe (1) rencontre cette directrice, pour $z = t$, si l'on a :

$$ct^{\frac{\alpha}{\gamma}} = at^{\frac{\alpha'}{\gamma'}}, \qquad c't^{\frac{\beta}{\gamma}} = bt^{\frac{\beta'}{\gamma'}}.$$

En éliminant c, c' et t entre ces deux équations et les équations (1), on a l'équation de la surface S :

$$(2) \qquad z^{\alpha\beta'-\beta\alpha'} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma\beta'-\beta\gamma'}\left(\frac{y}{b}\right)^{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'}.$$

Cette surface est également engendrée par les courbes

$$x = cz^{\frac{\alpha'}{\gamma'}}, \qquad y = c'z^{\frac{\beta'}{\gamma'}},$$

où c et c' sont liés par la relation

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{\gamma\beta'-\beta\gamma'}\left(\frac{c'}{b}\right)^{\alpha\gamma'-\gamma\alpha'} = 1,$$

de sorte que ces courbes rencontrent la courbe directrice

$$x = az^{\frac{\alpha}{\gamma}}, \qquad y = bz^{\frac{\beta}{\gamma}},$$

au point déterminé par

$$z = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}} = \left(\frac{c'}{b}\right)^{\frac{\gamma\gamma'}{\beta\gamma' - \gamma\beta'}}.$$

L'équation (2) de la surface S peut s'écrire

$$(3) \quad z = hx^{\lambda}y^{\mu}, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \qquad \mu = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

$$\frac{dz}{z} = \lambda\frac{dx}{x} + \mu\frac{dy}{y}, \qquad \frac{d^2z}{z} = \left(\frac{dz}{z}\right)^2 - \lambda\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \mu\left(\frac{dy}{y}\right)^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$\left(\lambda\frac{dx}{x} + \mu\frac{dy}{y}\right)^2 - \lambda\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \mu\left(\frac{dy}{y}\right)^2 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + 2\lambda\mu\left(\frac{dxdy}{xy}\right) + \mu(\mu - 1)\left(\frac{dy}{y}\right)^2 = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\,\frac{-\lambda\mu \pm \sqrt{\lambda\mu(\lambda + \mu - 1)}}{\mu(\mu - 1)}.$$

Soit

$$\frac{dy}{y} = p\frac{dx}{x}, \qquad p = \frac{-\lambda\mu \pm \sqrt{\lambda\mu(\lambda + \mu - 1)}}{\mu(\mu - 1)},$$

on a les lignes asymptotiques

$$y = cx^p, \qquad z = hc^{\mu}x^{\lambda + p\mu}.$$

Si c et h sont deux paramètres variables, on a le système de lignes asymptotiques des surfaces (3), ces courbes vérifient les équations :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{py} = \frac{dz}{(\lambda + p\mu)z}$$

et sont orthogonales au système de surfaces

$$x^2 + py^2 + (\lambda + p\mu)z^2 = c.$$

La surface (3) et la surface

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = c$$

sont orthogonales, en un point commun (x, y, z), si leurs normales,

$$\frac{X - x}{Ax} = \frac{Y - y}{By} = \frac{Z - z}{Cz} \quad \text{et} \quad \frac{X - x}{\lambda}x = \frac{Y - y}{\mu}y = \frac{Z - z}{-1}z.$$

sont perpendiculaires, ou si

$$A\lambda + B\mu - C = 0.$$

La surface (3) est donc orthogonale à toutes les surfaces

$$Ax^2 + By^2 + (A\lambda + B\mu)z^2 = c$$

où les rapports de A, B, c sont deux paramètres arbitraires.

199. Les droites passant par un point (x, y, z) sont déterminées par les valeurs de p et t :

$$p = x - tz, \qquad t^3 - 3z^2t + 3(xz - y) = 0.$$

Il y aura 3 valeurs de t, et 3 droites, réelles, si

$$4z^6 - 9(xz - y)^2 > 0$$

c'est-à-dire si y est compris entre les deux valeurs $xz \pm \frac{2}{3} z^3$.

2° Si p est fonction de t, la droite a une enveloppe, et reste tangente à une courbe, si les coefficients, t, p et p, $\frac{t^3}{3}$, ont leurs dérivées proportionnelles :

$$\frac{1}{p'} = \frac{p'}{t^2}, \qquad p' = \pm t, \qquad p = \pm \frac{t^2}{2} + c.$$

Soit la droite :

$$x = tz + \varepsilon \frac{t^2}{2} + c, \qquad y = z\left(\varepsilon \frac{t^2}{2} + c\right) + \frac{t^3}{3}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

L'arête de rebroussement est le lieu des points d'intersection de deux droites infiniment voisines

$$z = -t\varepsilon, \qquad x = c - \frac{\varepsilon}{2} t^2, \qquad y = -c\varepsilon t - \frac{t^3}{6}$$

c'est une cubique.

La trace de la droite sur le plan xoy est le point :

$$z = 0, \qquad x = \varepsilon \frac{t^2}{2} + c, \qquad y = \frac{t^3}{3},$$

qui décrit la courbe

$$9y^2 = 8\varepsilon(x - c)^3.$$

En éliminant t, on a les équations de l'arête de rebroussement

$$x = c - \frac{\varepsilon}{2} z^2, \qquad y = cz + \frac{\varepsilon}{6} z^3.$$

En éliminant c, on a le lieu de ces courbes :

$$xz - y + \frac{2}{3}\varepsilon z^3 = 0$$

ou

$$3(xz - y) = \pm 2z^3.$$

200. La courbe sera déterminée par les équations

$$y = x^n, \qquad z = f(x).$$

Le plan osculateur

$$\begin{vmatrix} X - x, & 1, & 0 \\ Y - y, & nx^{n-1}, & n(n-1)x^{n-2} \\ Z - z, & z', & z'' \end{vmatrix} = 0$$

passera par le point $P(o, y, o)$, projection de M sur oy, si l'on a :

$$\begin{vmatrix} x, & 1, & 0 \\ o, & x, & n-1 \\ z, & z', & z'' \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 z'' - (n-1)(xz' - z) = 0.$$

Cette équation différentielle a des solutions de la forme

$$z = x^\alpha, \qquad \alpha(\alpha - 1) - (n-1)(\alpha - 1) = 0, \qquad \alpha = 1 \quad \text{ou} \quad n - 1.$$

La solution générale est

$$z = f(x) = ax^{n-1} + bx.$$

La droite MP a pour équations :

$$Y = x^n, \qquad Z = X(ax^{n-2} + b).$$

Elle engendre la surface

$$Z = X\left(b + aY^{\frac{n-2}{n}}\right).$$

Sur cette surface, on a :

$$dZ = \left(b + aY^{\frac{n-2}{n}}\right)dX + a\frac{n-2}{n}XY^{-\frac{2}{n}}dY$$

$$d^2Z = 2a\frac{n-2}{n}Y^{-\frac{2}{n}}\left(dX - \frac{X}{nY}dY\right)dY.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$dY\left(n\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}\right) = 0.$$

Les lignes asymptotiques sont les génératrices

$$Y = c, \qquad Z = X\left(b + ac^{\frac{n-2}{n}}\right)$$

et les courbes :

$$Y = cX^n, \qquad Z = bX + ac^{\frac{n-2}{n}} X^{n-1}.$$

201. Le paraboloïde a pour équation :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Le plan tangent a pour équation :

$$(1) \qquad 2\lambda(x \cos\varphi + y \sin\varphi) - z = 2\lambda^2(p \cos^2\varphi + q \sin^2\varphi).$$

Il forme, avec le plan xoy, un angle γ,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}}.$$

Pour que cet angle soit constant, il faut que λ soit constant.

2° Si λ est constant, le plan tangent enveloppe une surface dont la génératrice est déterminée par l'équation (1), et sa dérivée

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi = 2\lambda(q - p) \sin\varphi \cos\varphi.$$

L'arête de rebroussement s'obtient en prenant une seconde fois la dérivée

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = 2\lambda(p - q)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

ces trois équations donnent :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = 2\lambda(p - q) \cos^3\varphi \\ y = 2\lambda(q - p) \sin^3\varphi \\ z = \lambda^2[-p - q + 3(p - q) \cos 2\varphi] \end{cases}$$

La génératrice a pour équations

$$\frac{X - x}{\cos\varphi} = \frac{Y - y}{\sin\varphi} = \frac{Z - z}{2\lambda},$$

elle forme avec oz un angle dont le cosinus est $\frac{2\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}}$.

3° Un point de la développable Σ, ou un point de la tangente à la courbe (2), est représenté, en fonction des deux paramètres φ et t, par les expressions :

$$x = 2\lambda(p - q) \cos^3\varphi + t \cos\varphi$$
$$y = 2\lambda(q - p) \sin^3\varphi + t \sin\varphi$$
$$z = \lambda^2(-p - q + 3(p - q) \cos 2\varphi) + 2\lambda t$$

ce point décrit une courbe normale à la génératrice, si l'on a :

$$\cos\varphi\, dx + \sin\varphi\, dy + 2\lambda dz = 0$$

ou, en remplaçant dx et dy en fonction de φ et t :

$$-6\lambda(p-q)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi + dt + 2\lambda dz = 0$$

$$t = c' - 2\lambda z - \frac{3}{2}\lambda(p-q)\cos 2\varphi$$

$$t = \frac{3}{2}\lambda(q-p)\cos 2\varphi + c$$

on a la courbe :

$$x = \lambda(q-p)\cos^3\varphi + (3\lambda\frac{p-q}{2} + c)\cos\varphi$$

$$y = \lambda(p-q)\sin^3\varphi + (3\lambda\frac{q-p}{2} + c)\sin\varphi$$

$$z = 2\lambda c - \lambda^2(p+q)$$

située dans un plan parallèle à xoy. La projection sur le plan xoy est définie par les deux premières équations, qui donnent :

$$\frac{dx}{-\sin\varphi} = \frac{dy}{\cos\varphi} = (c + 3\lambda\frac{q-p}{2}\cos 2\varphi)d\varphi.$$

La normale à cette courbe a pour équation :

$$-X\sin\varphi + Y\cos\varphi = 2\lambda(q-p)\sin\varphi\cos\varphi$$

projection de la génératrice, tangente à l'arête de rebroussement.

202. 1° Les cônes ayant leur sommet sur l'une des paraboles, et l'autre parabole pour base, répondent à la question.

2° Soit A un point de la première parabole, B un point de la seconde. Si la droite AB engendre, en se déplaçant, une surface développable, le plan tangent le long de AB contiendra les tangentes en A et B aux deux paraboles, et ces tangentes, étant dans un même plan, devront couper oz au même point ; soit $z = t$ ce point. La tangente à la première parabole a pour équations :

$$Y = 0, \qquad Z(z-a) - pX = \frac{z^2 - a^2}{2}.$$

Elle coupe oz au point $Z = t = \frac{z+a}{2}$. La tangente, qui passe par le point (o, o, t) de l'axe oz, a pour équation

$$2(Z-t)(t-a) = pX$$

le point de contact a pour coordonnées $z = 2t - a$,

$$x = \frac{(z-a)^2}{2p} = 2\frac{(t-a)^2}{p}.$$

De même, la tangente à la seconde parabole, qui coupe oz au même point, a pour équations :

$$X = 0, \qquad 2(Z-t)(t-b) = qY$$

son point de contact a pour coordonnées :

$$x = 0, \qquad z = 2t - b, \qquad y = 2\frac{(t-b)^2}{q}$$

Le plan qui passe par ces deux tangentes a pour équation :

$$2(Z-t) = \frac{pX}{t-a} + \frac{qY}{t-b}.$$

Lorsque t varie, l'enveloppe de ce plan est la surface développable S. En prenant la dérivée par rapport à t, on a l'intersection des deux plans infiniment voisins, génératrice de la surface.

$$\frac{pX}{(t-a)^2} + \frac{qY}{(t-b)^2} = 2.$$

On peut vérifier que la droite définie par ces deux équations passe par les deux points de contact des tangentes aux deux paraboles.

Pour avoir l'arête de rebroussement de la surface, il faut prendre une seconde fois la dérivée

$$\frac{pX}{(t-a)^3} + \frac{qY}{(t-b)^3} = 0.$$

En résolvant ces trois équations par rapport à x, y, z, on a les coordonnées du point M de l'arête de rebroussement, dont le plan osculateur est le plan mobile, qui passe par le point $P(o, o, t)$. On a ainsi :

$$\frac{\dfrac{pX}{(t-a)^2}}{t-a} = \frac{\dfrac{qY}{(t-b)^2}}{b-t} = \frac{2}{b-a}.$$

$$X = \frac{2(t-a)^3}{p(b-a)}, \qquad Y = \frac{2(t-b)^3}{q(a-b)}, \qquad Z = 3t - a - b.$$

Le plan osculateur est le plan mobile

$$2(Z-t) = \frac{pX}{t-a} + \frac{qY}{t-b}.$$

3° Ce plan coupe le plan xoy suivant la droite

$$\frac{pX}{t-a} + \frac{qY}{t-b} + 2t = 0.$$

Pour avoir le point N où cette droite touche son enveloppe, point d'intersection de deux droites infiniment voisines, il faut prendre la dérivée par rapport à t

$$\frac{pX}{(t-a)^2} + \frac{qY}{(t-b)^2} = 2$$

ces deux équations donnent :

$$X = 2\frac{(2t-b)(t-a)^2}{p(a-b)}, \qquad Y = 2\frac{(2t-a)(t-b)^2}{q(b-a)}.$$

4° Si $a = b$, les deux paraboles ont même sommet, le plan tangent commun devient :

$$2(Z-t)(t-a) = pX + qY$$

$$t^2 - t(Z+a) + aZ + \frac{1}{2}(pX + qY) = 0$$

ce plan reste parallèle à la droite fixe

$$\frac{X}{q} = \frac{Y}{-p} = \frac{Z}{0}.$$

Il en résulte que l'enveloppe est un cylindre. En exprimant que t a une racine double, on a l'équation de ce cylindre

$$(Z-a)^2 = 2(pX + qY);$$

c'est un cylindre qui passe par les deux paraboles.

203. Soient x, y, z les coordonnées du point M de la courbe S, qui sont fonctions d'un paramètre variable. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente, α', β', γ' ceux de la normale principale. On a :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds}, \quad \beta' = R\frac{d\beta}{ds}, \quad \gamma' = R\frac{d\gamma}{ds}$$

où R est le rayon de courbure. La binormale est perpendiculaire à ces deux directions, son sens étant tel que ces trois droites forment un trièdre pouvant coïncider avec celui des axes positifs, de sorte que les cosinus directeurs de la binormale sont :

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Les formules de Frenet donnent les dérivées de ces cosinus par rapport à s :

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \quad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}$$

où T est le rayon de torsion.

Si par M on mène une droite dans le plan normal, formant l'angle θ avec la normale principale, et $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec la binormale. Si, sur cette droite, on porte une longueur $MM_1 = l$, le point M_1 a pour coordonnées

$$X = x + l(\alpha' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta)$$
$$Y = y + l(\beta' \cos\theta + \beta'' \sin\theta)$$
$$Z = z + l(\gamma' \cos\theta + \gamma'' \sin\theta).$$

car MM_1 a pour projections $l \cos\theta$ et $l \sin\theta$ sur la normale principale et la binormale. Si θ, ainsi que x, y, z, est une fonction du paramètre t, et si l est un autre paramètre variable, ces trois équations représentent une surface réglée. Sur cette surface, on a :

$$dX = (\alpha' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta)dl +$$
$$+ \alpha\left(1 - \frac{l}{R}\cos\theta\right)ds + l(\alpha'' \cos\theta - \alpha' \sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)ds$$
$$dY = (\beta' \cos\theta + \beta'' \sin\theta)dl +$$
$$+ \beta\left(1 - \frac{l}{R}\cos\theta\right)ds + l(\beta'' \cos\theta - \beta' \sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)ds$$
$$dZ = (\gamma' \cos\theta + \gamma'' \sin\theta)dl +$$
$$+ \gamma\left(1 - \frac{l}{R}\cos\theta\right)ds + l(\gamma'' \cos\theta - \gamma' \sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)ds.$$

En éliminant dl et ds, on a la relation entre dX, dY, dZ, qui détermine le plan tangent en un point de la surface. En tenant compte des relations qui existent entre les 9 cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle, on a :

$$\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ = \left(1 - \frac{l}{R}\cos\theta\right)ds$$

$$\alpha' dX + \beta' dY + \gamma' dZ = \cos\theta\, dl - l\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)\sin\theta\, ds$$

$$\alpha'' dX + \beta'' dY + \gamma'' dZ = \sin\theta\, dl + l\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)\cos\theta\, ds$$

$$l\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)(\alpha dX+\beta dY+\gamma dZ)+\left(1-\frac{l}{R}\cos\theta\right)\sin\theta(\alpha' dX+\beta' dY+\gamma' dZ)$$
$$-\left(1-\frac{l\cos\theta}{R}\right)\cos\theta(\alpha'' dX+\beta'' dY+\gamma'' dZ)=0.$$

Les coefficients de X, Y, Z, dans l'équation du plan tangent, sont :

$$\alpha l\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)+(\alpha'\sin\theta-\alpha''\cos\theta)\left(1-\frac{l}{R}\cos\theta\right)$$

et les expressions symétriques, obtenues par permutation circulaire. Si le point M_1 se déplace sur une génératrice, le point M est fixe, l seul varie, lorsque l augmente indéfiniment le plan tangent a pour limite le plan dont les coefficients sont les expressions

$$\alpha\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)-(\alpha'\sin\theta-\alpha''\cos\theta)\frac{\cos\theta}{R}.$$

Le point central, sur la génératrice, est le point où le plan tangent est perpendiculaire au plan tangent au point à l'infini, sur cette génératrice. En exprimant que les deux plans sont perpendiculaires, on a

$$\sum\left[\alpha l\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)+(\alpha'\sin\theta-\alpha''\cos\theta)\left(1-\frac{l}{R}\cos\theta\right)\right]\left[\alpha\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)-\right.$$
$$\left.-(\alpha'\sin\theta-\alpha''\cos\theta)\frac{\cos\theta}{R}\right]=0$$

qui se réduit à

$$l\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)^2=\left(1-\frac{l}{R}\cos\theta\right)\frac{\cos\theta}{R}$$
$$l=\frac{R\cos\theta}{\cos^2\theta+R^2\left(\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{T}\right)^2}.$$

Le lieu du point central ainsi déterminé est la ligne de striction de la surface.

En particulier, si la surface est engendrée par la binormale,

$$\theta=\frac{\pi}{2},\qquad l=0,$$

la ligne de striction est la courbe donnée.

Si la surface est engendrée par la normale principale,

$$\theta=0,\qquad \frac{d\theta}{ds}=0,\qquad l=\frac{RT^2}{R^2+T^2}.$$

2° Pour que la surface engendrée par les normales soit développable, il faut que le plan tangent reste le même en tous les points d'une génératrice; c'est-à-dire quel que soit l, lorsque le point M ne varie pas. Pour $l = 0$, ce plan tangent a pour équation

$$(X - x)(\alpha' \sin\theta - \alpha'' \cos\theta) + (Y - y)(\beta' \sin\theta - \beta'' \cos\theta) + \\ + (Z - z)(\gamma' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta) = 0.$$

Pour que le plan tangent reste le même quel que soit l, il faudrait que

$$\alpha\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right), \qquad \beta\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right), \qquad \gamma\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right)$$

soient proportionnels aux cofficients de X, Y, Z. Si $\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}$ n'était pas nul, il faudrait

$$\frac{\alpha' \sin\theta - \alpha'' \cos\theta}{\alpha} = \frac{\beta' \sin\theta - \beta'' \cos\theta}{\beta} = \frac{\gamma' \sin\theta - \gamma'' \cos\theta}{\gamma}.$$

équations incompatibles. Car, en ajoutant les termes de ces fractions multipliés par α', β', γ', ou α'', β'', γ'', on obtiendrait

$$\sin\theta = 0, \qquad \cos\theta = 0.$$

On doit donc avoir :

$$d\theta = \frac{ds}{T}, \qquad \theta = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{T},$$

la normale considérée reste tangente à l'une des développées de la courbe donnée.

204. Ces théorèmes se déduisent immédiatement de considérations géométriques. La surface est l'enveloppe d'un plan tangent à une sphère aux points d'une courbe déterminée. Soient A, A′ deux points infiniment voisins de cette courbe. Les plans tangents en A et A′ se coupent suivant une droite dont la position limite passe par A. La surface développable est engendrée par une tangente AM à la sphère. Soit M le point de contact de AM avec l'arête de rebroussement. Le plan osculateur à cette courbe en M est le plan tangent à la sphère en A. La normale principale est parallèle à la tangente en A à la sphère qui est perpendiculaire à AM.

Le cône, passant par cette arête de rebroussement, dont le sommet est le centre O de la sphère, a pour plan tangent en M le

plan AMO, la normale principale à la courbe est normale au cône, c'est la propriété caractéristique des lignes géodésiques. En second lieu, MA est la droite tangente au cône et à la sphère, qui passe par M, l'arête de rebroussement est une courbe du cône enveloppe de telles droites.

1° Par la méthode de l'énoncé, on doit considérer une surface tangente à l'origine au plan xoy, dont l'équation peut se représenter par la série

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$
$$dz = 2(ax + by + \ldots)\,dx + 2(bx + cy + \ldots)\,dy.$$

Le plan tangent au point (x, y, z) a pour équation

$$Z - z = 2(ax + by + \ldots)(X - x) + 2(bx + cy + \ldots)(Y - y).$$

Il coupe le plan tangent $Z = 0$, à l'origine, suivant la droite

$$2X(ax + by + \ldots) + 2Y(bx + cy + \ldots) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots$$

Si x et y tendent vers zéro, $\frac{y}{x}$ tendant vers m, cette droite a pour limite la droite

$$X(a + bm) + Y(b + cm) = 0$$

de coefficient angulaire m',

$$a + b(m + m') + cmm' = 0.$$

2° Pour une surface développable, le plan tangent dépend d'une seule variable, il en résulte que $p = f(q)$, et, entre les dérivées secondes r, s, t, de z, on a la relation $rt = s^2$. Ici on a :

$$p = 2(ax + by) + \ldots \qquad q = 2(bx + cy) + \ldots$$
$$r = 2a + \ldots, \qquad s = 2b + \ldots, \qquad t = 2c + \ldots$$

donc $ac = b^2$, la relation précédente devient

$$a^2 + ab(m + m') + b^2mm' = 0$$
$$(a + bm)(a + bm') = 0$$

$m' = -\frac{a}{b}$, excepté dans le cas particulier où $m = -\frac{a}{b}$. Le plan tangent dépend d'une seule variable, l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins est la génératrice de la surface déve-

loppable. Si le point de contact décrit cette génératrice les deux plans tangents coïncident, leur intersection est indéterminée.

3° Il en résulte que la surface enveloppe des plans tangents à la sphère est engendrée par une droite tangente à la sphère ; l'arête de rebroussement est une courbe dont les tangentes restent tangentes à la sphère.

4° La tangente à la courbe c,

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

doit être à la distance R de l'origine, centre de la sphère.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \Sigma x^2 \Sigma dx^2 - (\Sigma xdx)^2 =$$
$$= (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2.$$

5° Sur un cône de sommet O, une ligne géodésique doit avoir pour normale principale la normale au cône, qui est perpendiculaire à la génératrice OM.

Si les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe sont exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe, les cosinus directeurs de la normale principale sont proportionnels à

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Pour qu'elle soit perpendiculaire à la génératrice OM du cône, il faut que l'on ait :

$$x\frac{d^2x}{ds^2} + y\frac{d^2y}{ds^2} + z\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds}\right) = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = s + a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (s + a)^2 + b$$

où a et b sont deux constantes.

$$\frac{(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\Sigma x^2 \Sigma dx^2 - (\Sigma xdx)^2}{\Sigma dx^2} = b.$$

Il faut choisir $b = R^2$. Toute courbe tracée sur un cône, dont les tangentes restent tangentes à une sphère dont le centre est le sommet du cône, est une ligne géodésique.

6° L'arête de rebroussement des surfaces développables considérées est une ligne géodésique du cône, parce qu'elle vérifie leur équation différentielle.

205. La courbe c est représentée par les équations :

$$x = R \cos t, \qquad y = R \sin t, \qquad z = \frac{1}{2} R^2 \sin 2t.$$

Le plan tangent au paraboloïde, en un point de cette courbe, a pour équation

$$Z - Xy - Yx + xy = 0$$
$$Z - XR \sin t - YR \cos t + R^2 \sin t \cos t = 0.$$

Il forme, avec l'axe oz, un angle γ

$$\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2}}, \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{R}.$$

L'enveloppe de la trace du plan tangent sur le plan xoy est donnée par les équations :

$$\begin{cases} X \sin t + Y \cos t = \dfrac{R}{2} \sin 2t \\ X \cos t - Y \sin t = R \cos 2t \end{cases}$$
$$X = R \cos^3 t, \qquad Y = R \sin^3 t$$

ou

$$X = \frac{R}{4}(3 \cos t + \cos 3t), \qquad Y = \frac{R}{4}(3 \sin t - \sin 3t),$$

Cette courbe enveloppe est une épicycloïde, engendrée par un point d'un cercle de rayon $\frac{R}{4}$ qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon R, de sorte que le centre du cercle mobile décrit le cercle

$$X = \frac{3}{4} R \cos t, \qquad Y = \frac{3}{4} R \sin t.$$

L'arête de rebroussement de la surface développable, enveloppe du plan tangent, s'obtient en prenant deux fois les déri-

vées par rapport au paramètre t, ce qui donne les trois équations :

$$\left\{\begin{aligned} z - x\mathrm{R}\sin t - y\mathrm{R}\cos t + \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\sin 2t &= 0 \\ -x\cos t + y\sin t + \mathrm{R}\cos 2t &= 0 \\ x\sin t + y\cos t - 2\mathrm{R}\sin 2t &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}(\cos 2t\cos t + 2\sin 2t\sin t) = \frac{\mathrm{R}}{2}(3\cos t - \cos 3t) \\ y &= \mathrm{R}(-\cos 2t\sin t + 2\sin 2t\cos t) = \frac{\mathrm{R}}{2}(3\sin t + \sin 3t) \\ z &= \frac{3}{2}\mathrm{R}^2\sin 2t. \end{aligned}\right.$$

Sur cette courbe, on a :

$$dx = \frac{3}{2}\mathrm{R}(\sin 3t - \sin t)dt = 3\mathrm{R}\sin t\cos 2t dt$$

$$dy = \frac{3}{2}\mathrm{R}(\cos 3t + \cos t)dt = 3\mathrm{R}\cos t\cos 2t dt$$

$$dz = 3\mathrm{R}^2\cos 2t dt.$$

Soit s l'arc de courbe compté à partir du point $t = 0$, (R, 0, 0).

$$ds^2 = 9\mathrm{R}^2(1 + \mathrm{R}^2)\cos^2 2t dt^2$$

$$ds = 3\mathrm{R}\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}\cos 2t dt$$

$$s = \frac{3}{2}\mathrm{R}\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}\sin 2t.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont :

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}}, \qquad \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}}, \qquad \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1 + \mathrm{R}^2}}.$$

Une développante s'obtient en portant, sur la tangente au point M de la courbe, une longueur MN telle que MN $+ s$ soit constant. Les coordonnées du point N, qui décrit la développante, sont :

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}}{2}(3\cos t - \cos 3t) + \frac{3}{2}\mathrm{R}\sin t(c - \sin 2t)$$

$$\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{R}}{2}(3\sin t + \sin 3t) + \frac{3}{2}\mathrm{R}\cos t(c - \sin 2t)$$

$$\mathrm{Z} = \frac{3\mathrm{R}^2}{2}\sin 2t + \frac{3}{2}\mathrm{R}^2(c - \sin 2t)$$

ou

$$X = R\cos^3 t + \frac{a}{R}\sin t$$

$$Y = R\sin^3 t + \frac{a}{R}\cos t$$

$$Z = a.$$

Cette courbe est la trace de la surface développable sur le plan $z = a$, résultat que l'on pouvait prévoir, en remarquant que la courbe est une hélice, sur un cylindre parallèle à oz ; ce qui résulte de la propriété des plans tangents au paraboloïde donnée dans l'énoncé.

206. Pour toute courbe tracée sur la surface, on a :

$$(1)\quad dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \qquad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta, \qquad dz = f'(\theta)d\theta$$

$$dz = f'(\theta)\,\frac{\cos\theta dy - \sin\theta dx}{r}.$$

Les lignes de courbure sont déterminées par les relations :

$$p = -\frac{\sin\theta}{r}f'(\theta), \qquad q = \frac{\cos\theta}{r}f'(\theta)$$

$$dx + pdz = \cos\theta dr - (r + \frac{1}{r}f'(\theta)^2)\sin\theta d\theta$$

$$dy + qdz = \sin\theta dr + (r + \frac{1}{r}f'(\theta)^2)\cos\theta d\theta.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure :

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

devient :

$$(\cos\theta dr - \frac{r^2 + f'(\theta)^2}{r}\sin\theta d\theta)[-f'(\theta)\cos\theta dr + r(f''(\theta)\cos\theta - f'(\theta)\sin\theta)d\theta] =$$

$$= (\sin\theta dr + \frac{r^2 + f'(\theta)^2}{r}\cos\theta d\theta)[f'(\theta)\sin\theta dr - r(f''(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta)d\theta]$$

$$(2)\qquad -f'(\theta)dr^2 + rf''(\theta)drd\theta + f'(\theta)(r^2 + f'(\theta)^2)d\theta^2 = 0.$$

Sur une génératrice

$$\theta = c, \qquad d\theta = 0, \qquad dx = \cos\theta dr, \qquad dy = \sin\theta dr, \qquad dz = 0.$$

Une courbe, dont la tangente est définie par les équations (1), forme avec la génératrice, au point (r, θ), un angle α donné par la relation

$$\cos\alpha = \frac{\cos\theta dx + \sin\theta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + f'(\theta)^2 d\theta^2}}.$$

Si une ligne de courbure forme en ce point l'angle α avec la génératrice, on a l'équation (2) et

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = r^2 + f'(\theta)^2.$$

En éliminant $\frac{dr}{d\theta}$, on obtient :

$$r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha f''(\theta)^2 = (r^2 + f'(\theta)^2) f'(\theta)^2 (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)^2$$

$$r^2 = \frac{4f'(\theta)^4 \cos^2 2\alpha}{f''(\theta)^2 \sin^2 2\alpha - 4f'(\theta)^2 \cos^2 2\alpha}.$$

Si

$$f(\theta) = a \cos \theta, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad r^2 = \frac{4f'(\theta)^4}{3f''(\theta)^2 - 4f'(\theta)^2} = \frac{4a^2 \sin^4 \theta}{3 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta}$$

c'est l'équation de la projection en coordonnées polaires :

$$r = \frac{2a \sin^2 \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta}}, \quad r' = 2a \sin \theta \cos \theta \frac{6 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{(3 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il suffit de faire varier θ de o à α, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; car, de α à $\frac{\pi}{2}$, r est imaginaire, et la courbe est symétrique par rapport aux axes. La droite $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$ est une asymptote.

CHAPITRE IX

—

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

207. Pour intégrer une équation linéaire aux dérivées partielles, on forme le système d'équations différentielles des courbes caractéristiques, qui est ici :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$$

$$\mathrm{L}x = -\mathrm{L}y + \mathrm{L}a, \qquad \mathrm{L}z = \mathrm{L}x + \mathrm{L}b.$$

Les courbes caractéristiques sont représentées par les équations

$$(1) \qquad xy = a, \qquad \frac{z}{x} = b.$$

Les surfaces intégrales sont $z = xf(xy)$, obtenues en posant $b = f(a)$, où f est une fonction arbitraire.

Pour exprimer qu'une courbe caractéristique rencontre la courbe donnée, il faut éliminer x, y, z entre les équations (1) et les équations $x = y$, $z = x^2$ de cette courbe. On a alors : $x^2 = a$, $x^2 = b$, et $a = b$. Donc, si $f(a) = a = b$, la surface, lieu des caractéristiques (1), passe par la courbe donnée. On a la surface :

$$z = x^2 y.$$

Les lignes asymptotiques de cette surface sont déterminées par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial xy} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 0$$

$$2y dx^2 + 4x dx\,dy = 0, \qquad dx\left(\frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y}\right) = 0$$

qui se décompose et donne les deux solutions :

$$x = c, \qquad \mathrm{L}x + 2\mathrm{L}y = \mathrm{L}c'.$$

Le premier système de lignes asymptotiques est composé des droites

$$x = c, \qquad z = c^2 y.$$

Le second système est formé des courbes

$$xy^2 = c', \qquad z = x^2 y,$$

208. Les équations différentielles des courbes caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dz}{-6x^2 y}$$

qui donnent :

$$x^3 - y^2 = a, \qquad z + y^2 = b$$

l'intégrale générale s'obtient en posant $b = f(a)$, ou :

$$z + y^2 = f(x^3 - y^2).$$

Une courbe caractéristique passe par le point $x = 0$, $y = \sqrt{2z}$, z étant arbitraire, si $a = -2z$, $b = 3z$. Cette caractéristique rencontre la parabole si $b = -\frac{3a}{2}$, ce qui détermine la surface, lieu des caractéristiques qui rencontrent la parabole :

$$z + y^2 = -\frac{3}{2}(x^3 - y^2)$$

ou

$$z = \frac{1}{2}(y^2 - 3x^3).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface est :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} dx^2 + 2\frac{\delta^2 z}{\delta xy} dx\,dy + \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} dy^2 = 0$$

$$-9x\,dx^2 + dy^2 = 0, \qquad dy = \pm 3\sqrt{x}\,dx$$

$$y = c \pm 2x\sqrt{x}.$$

Les lignes asymptotiques sont les intersections de la surface

$$2z = y^2 - 3x^3$$

et des cylindres paraboliques

$$8z = y^2 + 6cy - 3c^2.$$

Par tout point de la surface passent deux de ces courbes.

209. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{z(x+z)} = \frac{dy}{-y(y+z)} = \frac{dz}{0}$$

$$z = a, \qquad \frac{dx}{x+z} = dy\left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{y}\right)$$

comme z peut être supposé constant, puisque $z = a$ est une intégrale, on a :

$$\mathrm{L}(x+z) = \mathrm{L}(y+z) - \mathrm{L}y + \mathrm{L}b$$
$$y(x+z) = b(y+z).$$

L'intégrale générale est

$$y(x+z) = (y+z)f(z).$$

Une courbe caractéristique rencontre la parabole $x = 1$, $y = z^2$, si l'on a, en même temps :

$$z = a, \qquad b = y\,\frac{1+z}{y+z} = a^2\,\frac{1+a}{a^2+a} = a,$$

ce qui donne $f(z) = z$, et l'intégrale

$$xy = z^2, \qquad \text{ou} \qquad z = \sqrt{xy}.$$

210. Les équations différentielles des courbes caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x^n} = \frac{dy}{y^n} = \frac{dz}{z^n}.$$

Si $n \lesseqgtr 1$, les courbes caractéristiques ont pour équations :

$$x^{1-n} - y^{1-n} = a, \qquad z^{1-n} - x^{1-n} = b.$$

L'intégrale générale est

$$z^{1-n} = x^{1-n} + f(x^{1-n} - y^{1-n})$$

où f est une fonction arbitraire.

Pour qu'une courbe caractéristique rencontre la droite $z = 1$, $x = y\sqrt{2}$, il faut que l'on ait, en même temps :

$$a = x^{1-n} - x^{1-n}\,.\,2^{\frac{n-1}{2}}, \qquad b = 1 - x^{1-n}$$

$$a = \left(1 - 2^{\frac{n-1}{2}}\right)(1-b)$$

la surface intégrale est

$$x^{1-n} - y^{1-n} = \left(1 - 2^{\frac{n-1}{2}}\right)(1 - z^{1-n} + x^{1-n})$$

$$z^{1-n} = 1 + \frac{x^{1-n} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - y^{1-n}}{2^{\frac{n-1}{2}} - 1}.$$

Si $n = 0$,

$$z = 1 - \frac{x - y\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 1 - (\sqrt{2} + 1)x + (2 + \sqrt{2})y.$$

Si $n = -1$,

$$z^2 = 1 - x^2 + 2y^2$$

hyperboloïde de révolution autour de OY, dont les lignes de courbure sont les méridiens, et les parallèles, situés dans les plans

$$z = cx, \qquad y = c'.$$

Si $n = 1$, les caractéristiques ont pour équations différentielles

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \qquad \frac{y}{x} = a, \qquad \frac{z}{x} = b.$$

Les surfaces intégrales sont $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, cônes de sommets O. Pour que ce cône contienne la droite $z = 1$, $x = y\sqrt{2}$ il faudrait qu'il se réduise au plan $x = y\sqrt{2}$; il n'y a pas de fonction z de x et y correspondant à ce cas particulier.

211. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{2y(2a - x)} = \frac{dy}{x^2 + z^2 - y^2 - 4ax} = \frac{dz}{-2yz}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{dx}{x - 2a} = \frac{dz}{z} = \frac{2ydy}{y^2 - x^2 - z^2 + 4ax} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ce qui donne les intégrales :

$$\mathrm{L}(x - 2a) = \mathrm{L}z + \mathrm{L}c, \qquad \mathrm{L}(x^2 + y^2 + z^2) = \mathrm{L}z + \mathrm{L}c'$$
$$x - 2a = cz. \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'z.$$

Et l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$x^2 + y^2 + z^2 = zf\left(\frac{x - 2a}{z}\right).$$

Cette surface est engendrée par le cercle

$$x - 2a = cz, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = zf(c).$$

Le plan tangent à la surface a pour équation :

$$(X-x)\left(2x - f'\left(\frac{x-2a}{z}\right)\right) + (Y-y)2y + (Z-z)\left(2z - f + \frac{x-2a}{z}f'\right) = 0.$$

En un point du cercle générateur, cette équation s'écrira :

$$(X-x)\left(2x - f'(c)\right) + (Y-y)\,2y + (Z-z)\left(2z - f(c) + cf'(c)\right) = 0$$

il forme, avec le plan du cercle, un angle α :

$$\cos\alpha = \frac{2x - f'(c) - c'2z - f + cf')}{\sqrt{1+c^2}\sqrt{(2x-f')^2 + (2y)^2 + (2z - f + cf')^2}} =$$

$$= \frac{4a + cf - (1+c^2)f'}{\sqrt{1+c^2}\sqrt{f'^2 - 8af' + (f - cf'^2)}}$$

α est constant en tout point d'un même cercle. La surface est circonscrite à une sphère le long de ce cercle, et sera l'enveloppe d'une sphère variable.

Une courbe caractéristique

$$x - 2a = cz, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'z$$

rencontre la courbe

$$x = 0, \qquad z(y^2 + z^2) = 8a^3,$$

si l'on a, en même temps

$$cz = -2a, \qquad 8a^3 = c'z^2, \qquad c' = 2ac^2$$

on aura la surface, lieu de ces courbes :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\,\frac{(x-2a)^2}{z}$$

cette surface est l'enveloppe des sphères :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2a}\,(x - 2a)t + zt^2 = 0.$$

212. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)}{z\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} = \frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

qui donnent :

$$\mathrm{L}y = \mathrm{L}x + \mathrm{L}c, \qquad \mathrm{L}z = \mathrm{L}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) + \mathrm{L}c'$$
$$y = cx, \qquad z = c'\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right).$$

Les surfaces intégrales sont

$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right) f\left(\frac{y}{x}\right)$$

elles sont engendrées par la droite

$$y = cx, \qquad z = \left(x\sqrt{1 + c^2} - a\right) f(c).$$

Une courbe caractéristique rencontre la courbe

$$x = 2z, \qquad x^2 + y^2 = 4a^2,$$

si l'on a :

$$z = c'\left(\sqrt{4a^2} - a\right) = ac',$$

et

$$4a^2 = x^2(1 + c^2) = 4z^2(1 + c^2)$$
$$c'^2(1 + c^2) = 1.$$

Le lieu de ces courbes caractéristiques est la surface :

$$z = x\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad a^2x^2 = (z - x)^2\,(x^2 + y^2).$$

Cette surface sera représentée par les équations :

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = (u - a) \cos v.$$

Les droites $v = \mathrm{C}$, sont des lignes asymptotiques.

On a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial uv} & \frac{\partial^2 y}{\partial uv} & \frac{\partial^2 z}{\partial uv} \end{vmatrix} = -a \sin v$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} = au \cos v$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$-2du\,dv \sin v + dv^2 u \cos v = 0.$$

Le second système de lignes asymptotiques est donné par

$$2du \sin v = u \cos v dv, \qquad 2\frac{du}{u} = \frac{\cos v dv}{\sin v}$$

$$2\mathrm{L}u = \mathrm{L} \sin v + \mathrm{L}c, \qquad u^2 = c \sin v$$

$$(x^2 + y^2)^3 = c^2 y^2.$$

Une génératrice rectiligne a pour équation $v = c$, sur cette droite

$$dx = \cos v du, \qquad dy = \sin v du, \qquad dz = \cos v du$$

ses cosinus directeurs sont

$$\frac{\cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}, \qquad \frac{\sin v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}, \qquad \frac{\cos v}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}.$$

Pour une courbe quelconque de la surface, on a

$$dx = \cos v du - u \sin v dv, \qquad dy = \sin v du + u \cos v dv,$$
$$dz = \cos v du - (u - a) \sin v dv$$

en un point (u, v) cette courbe est perpendiculaire à la génératrice, si l'on a :

$$\cos v dx + \sin v dy + \cos v dz = 0$$

$$\frac{du}{u - a} = \frac{\sin v \cos v}{1 + \cos^2 v} dv, \qquad \mathrm{L}(u - a) + \frac{1}{2}\mathrm{L}(1 + \cos^2 v) = \mathrm{L}c$$

$$u - a = \frac{c}{\sqrt{1 + \cos^2 v}}$$

ces courbes sont situées sur les surfaces

$$z^2 = \frac{c^2 x^2}{2x^2 + y^2}.$$

213. L'équation $py - qx = a$ donne les équations différentielles des courbes caractéristiques :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{a} = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = c^2, \qquad \frac{z}{a} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + c'.$$

En posant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, on peut mettre l'équation générale des surfaces intégrales sous la forme :

$$z = -a\omega + f(\rho).$$

2° $$dz = -a\frac{xdy - ydx}{\rho^2} + f'(\rho)\frac{xdx + ydy}{\rho}$$

$$p = \frac{a}{\rho}\sin\omega + f'(\rho)\cos\omega, \qquad q = \frac{-a}{\rho}\cos\omega + f'(\rho)\sin\omega.$$

La normale forme, avec l'axe OX, un angle α :

$$\cos\alpha = \frac{\rho f'(\rho)\cos\omega + a\sin\omega}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + \rho^2 f'(\rho)^2}}.$$

Pour que la section plane, $x = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, soit une ligne de courbure, il faut (probl. 178) qu'en tout point de cette section la normale fasse un angle constant α avec OX. On a alors l'identité en ρ :

$$\rho^2 + \rho^2 f'(\rho)^2 = b^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$f'(\rho) = \sqrt{\frac{b^2}{\rho^2} - 1} = -\frac{\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}} + \frac{b^2}{\rho^2\sqrt{\frac{b^2}{\rho^2} - 1}}$$

$$f(\rho) = \sqrt{b^2 - \rho^2} - b\mathrm{L}\left(\frac{b}{\rho} + \sqrt{\frac{b^2}{\rho^2} - 1}\right) + c$$

$$z = -a\omega + \sqrt{b^2 - \rho^2} - b\mathrm{L}\frac{b + \sqrt{b^2 - \rho^2}}{\rho} + c.$$

3° On a alors :

$$dz = -ad\omega + \sqrt{b^2 - \rho^2}\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

Les équations de la normale sont :

$$\frac{X - x}{a\sin\omega + \sqrt{b^2 - \rho^2}\cos\omega} = \frac{Y - y}{-a\cos\omega + \sqrt{b^2 - \rho^2}\sin\omega} = \frac{Z - z}{-\rho}$$

ses cosinus directeurs sont égaux à ces dénominateurs multipliés par $\frac{\cos\alpha}{a}$. Elle forme avec la droite

$$\frac{X}{\sin\omega} = \frac{Y}{-\cos\omega} = \frac{Z}{0},$$

perpendiculaire au plan MOZ, un angle égal à α. Il en résulte que

les sections $\omega = c$, par des plans passant par oz, sont des lignes de courbure.

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} a\sin\omega + \cos\omega\sqrt{b^2-\rho^2}, & \left(ad\omega - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}}\right)\cos\omega - \sin\omega d\omega\sqrt{b^2-\rho^2}, & \cos\omega d\rho - \rho\sin\omega d\omega \\ -a\cos\omega + \sin\omega\sqrt{b^2-\rho^2}, & \left(ad\omega - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}}\right)\sin\omega + \cos\omega d\omega\sqrt{b^2-\rho^2}, & \sin\omega d\rho + \rho\cos\omega d\omega \\ -\rho, & -d\rho, & -ad\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\frac{d\rho}{\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

Si on remplace les deux premières lignes par les sommes obtenues en les ajoutant après les avoir multipliées, d'une part par $\cos\omega$ et $\sin\omega$, d'autre part par $-\sin\omega$ et $\cos\omega$, cette équation devient :

$$\begin{vmatrix} \sqrt{b^2-\rho^2}, & ad\omega - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}}, & d\rho \\ -a, & \sqrt{b^2-\rho^2}\, d\omega, & \rho d\omega \\ -\rho, & -d\rho, & -ad\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\,\frac{d\rho}{\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2+b^2)d\omega\left(-ad\omega + \frac{b^2}{\rho\sqrt{b^2-\rho^2}}\,d\rho\right) = 0$$

Le premier système est $\omega = c$. Pour le second système, on a :

$$-ad\omega + \frac{b^2}{\sqrt{\frac{b^2}{\rho^2}-1}}\,\frac{d\rho}{\rho^2} = 0$$

$$-a\omega = b\mathrm{L}\,\frac{b+\sqrt{b^2-\rho^2}}{\rho} + c'$$

ou

$$b - \sqrt{b^2-\rho^2} = c\rho e^{\omega\cot g\,\alpha}$$

$$b + \sqrt{b^2-\rho^2} = \frac{\rho}{c}\,e^{-\omega\cot g\,\alpha}$$

$$\frac{2b}{\rho} = ce^{\omega\cot g\,\alpha} + \frac{1}{c}\,e^{-\omega\cot g\,\alpha}.$$

Pour déterminer les centres de courbure, on peut représenter un point de la normale à la surface par les expressions :

$$X = \rho\cos\omega + t\left(a\sin\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\cos\omega\right)$$

$$Y = \rho\sin\omega + t\left(-a\cos\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\sin\omega\right)$$

$$Z = z - \rho t.$$

Le centre de courbure peut s'obtenir en supposant ρ fonction de ω, de façon que le point de la surface décrive une ligne de courbure, t étant déterminé en fonction de ω par la condition que dX, dY, dZ soient nuls, ou que le centre de courbure est le point d'intersection de deux normales infiniment voisines.

Sur la ligne de courbure $\omega = c$, $d\omega = 0$, on a :

$$\cos\omega d\rho + \left(a\sin\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\cos\omega\right)dt - \frac{t\cos\omega}{\sqrt{b^2-\rho^2}}\rho d\rho = 0$$

$$\sin\omega d\rho + \left(-a\cos\omega + \sqrt{b^2-\rho^2}\sin\omega\right)dt - \frac{t\sin\omega}{\sqrt{b^2-\rho^2}}\rho d\rho = 0$$

$$\sqrt{b^2-\rho^2}\,\frac{d\rho}{\rho} - \rho dt - t d\rho = 0$$

ces trois équations se réduisent à deux :

$$dt = 0, \qquad t = \frac{\sqrt{b^2-\rho^2}}{\rho}.$$

Le rayon de courbure est

$$t\sqrt{a^2+b^2} = a\,\frac{\sqrt{b^2-\rho^2}}{\rho\cos\alpha}.$$

Pour une ligne de courbure du second système, on a :

$$a d\omega = \frac{b^2 d\rho}{\rho\sqrt{b^2-\rho^2}}$$

$$\left(d\rho + \sqrt{b^2-\rho^2}\,dt - \frac{t\rho\,d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}} + a t d\omega\right)\cos\omega -$$

$$-\left(\rho d\omega - a dt + t\sqrt{b^2-\rho^2}\,d\omega\right)\sin\omega = 0$$

$$\left(d\rho + \sqrt{b^2-\rho^2}\,dt - \frac{t\rho\,d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}} + a t d\omega\right)\sin\omega +$$

$$+\left(\rho d\omega - a dt + t\sqrt{b^2-\rho^2}\,d\omega\right)\cos\omega = 0$$

ou

$$d\rho + \sqrt{b^2-\rho^2}\,dt - \frac{t\rho\,d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}} + a t d\omega = 0$$

$$\rho d\omega - a dt + t\sqrt{b^2-\rho^2}\,d\omega = 0.$$

En éliminant dt, et remplaçant $d\rho$ par

$$\frac{a\rho}{b^2}\sqrt{b^2-\rho^2}\,d\omega$$

on a

$$t = -\frac{\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}}.$$

Le rayon de courbure correspondant est :

$$t\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a\rho}{\cos\alpha\sqrt{b^2 - \rho^2}}.$$

214. Les courbes caractéristiques sont déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{xdx + ydy + zdz}{z(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'x.$$

Les surfaces intégrales

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

sont engendrées par les cercles

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xf(c)$$

qui sont tangents en o à l'axe oz. La surface passera par le cercle $x = a$, $z^2 - y^2 = a^2$, si l'équation

$$2a^2 + 2y^2 = af\left(\frac{y}{a}\right)$$

est vérifiée pour toute valeur de y.

$$f(t) = 2a(1 + t^2).$$

On a la surface :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\left(x + \frac{y^2}{x}\right).$$

215. Les équations différentielles des caractéristiques

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{\frac{4z}{x - y}} = \frac{d(x - y)}{2}, \qquad \frac{dz}{z} = 2\frac{d(x - y)}{x - y}$$

donnent

$$x + y = c, \qquad z = c'(x - y)^2.$$

Les surfaces intégrales sont :

$$z = (x - y)^2 f(x + y)$$

ou

$$z = u^2 f(v), \qquad x - y = u, \qquad x + y = v.$$

2° Si u et v sont les variables indépendantes, on a :

$$dz = 2uduf(v) + u^2 f'(v)dv$$
$$d^2z = 2f(v)du^2 + 4uf'(v)dudv + u^2 f''(v)dv^2$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$f(v)\frac{du^2}{u^2} + 2f'(v)\frac{du}{u}dv + \frac{f''(v)}{2}dv^2 = 0$$

$$\frac{du}{u} = \frac{-2f'(v) \pm \sqrt{4f'(v)^2 - 2f(v)f''(v)}}{2f(v)}dv$$

$$\mathrm{L}u = -\mathrm{L}f(v) \pm \int \sqrt{\frac{f'(v)^2}{f(v)^2} - \frac{f''(v)}{2f(v)}}\,dv + c.$$

3° Une courbe du plan xoy peut être donnée par l'équation $u = \varphi(v)$, c'est la projection d'une ligne asymptotique si l'on a :

$$2f(v)\left(\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\right)^2 + 4f'(v)\frac{'(v)}{\varphi(v)} + f''(v) = 0$$

c'est une équation différentielle linéaire, qui détermine la fonction $f(v)$.

Si la courbe donnée est

$$x - y = u = a, \qquad \varphi(v) = a, \qquad \varphi'(v) = 0,$$

l'équation $f''(v) = 0$ a la solution générale $f(v) = \alpha + \beta v$. On a la surface

$$z = u^2(\alpha + \beta v) = (x - y)^2\,[\alpha + \beta(x + y)].$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$(\alpha + \beta v)du^2 + 2\beta ududv = 0$$

se décompose :

$$du = 0, \qquad \frac{du}{u} + \frac{2\beta dv}{\alpha + \beta v} = 0.$$

Les deux systèmes sont les droites

$$u = c, \qquad z = c^2(\alpha + \beta v)$$

et les courbes dont les projections sont

$$u(\alpha + \beta v)^2 = c'.$$

4° La section

$$z = b, \qquad u^2 f(v) = b$$

sera une ligne asymptotique, si l'équation différentielle des lignes asymptotiques admet cette solution, pour laquelle

$$\frac{du}{u} = -\frac{f'(v)}{2f(v)}\,dv,$$

ce qui donne :

$$f''(v) = \frac{3}{2}\frac{f'(v)^2}{f(v)}, \qquad \frac{f''}{f'} = \frac{3}{2}\frac{f'}{f}$$

$$\mathrm{L}f' = \frac{3}{2}\,\mathrm{L}f + \mathrm{L}c, \qquad f'(v) = cf(v)^{\frac{3}{2}}$$

$$f^{-\frac{3}{2}}df = cdv, \qquad f^{-\frac{1}{2}} = -\frac{c}{2}\,v + c'.$$

On peut mettre cette solution sous la forme

$$f(v) = \frac{a}{(v+b)^2}, \qquad z = a\left(\frac{u}{v+b}\right)^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques devient :

$$\left(\frac{du}{u}\right)^2 - 4\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v+b} + 3\left(\frac{dv}{v+b}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v+b}\right)\left(\frac{du}{u} - 3\,\frac{dv}{v+b}\right) = 0.$$

On a les deux systèmes :

$$u = c(v+b), \qquad u = c(v+b)^3.$$

Le premier est formé des courbes situées dans les plans $z = ac^2$.

216. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{2\,\mathrm{ch}\,x} = \frac{dy}{2y\,\mathrm{sh}\,x} = \frac{dz}{z\,\mathrm{sh}\,x}$$

où

$$\mathrm{ch}\,x = \cos xi = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}\,x = \frac{\sin xi}{i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On en déduit les équations des courbes caractéristiques :

(1) $$z^2 = cy, \qquad y = b\,\mathrm{ch}\,x$$

Les surfaces intégrales sont

$$z^2 = yf\left(\frac{y}{\mathrm{ch}\,x}\right).$$

2° Les courbes caractéristiques (1) rencontrent la droite

$$x = y = z,$$

si l'on a :

$$c = x, \qquad b = \frac{x}{\operatorname{ch} x} = \frac{c}{\operatorname{ch} c}$$

ces caractéristiques :

$$z^2 = cy, \qquad y = \frac{c}{\operatorname{ch} c} \operatorname{ch} x$$

engendrent la surface intégrale

$$y^2 \operatorname{ch}\left(\frac{z^2}{y}\right) = z^2 \operatorname{ch} x.$$

3° Les caractéristiques (1) rencontrent la parabole

$$x = 0, \qquad z^2 = 2m(y - a)$$

si l'on a :

$$y = b, \qquad z^2 = cb = 2m(b - a)$$

$$b = \frac{2am}{2m - c}$$

ces caractéristiques :

$$z^2 = cy, \qquad y = \frac{2am}{2m - c} \operatorname{ch} x$$

engendrent la surface intégrale :

$$2my - z^2 = 2am \operatorname{ch} x.$$

4° La chaînette

$$z = 0, \qquad y = \alpha \operatorname{ch} x$$

est une courbe caractéristique, qui correspond à

$$c = 0, \qquad b = \alpha.$$

Par cette chaînette passent une infinité de surfaces intégrales qui ont pour équation

$$y = f\left(\frac{z^2}{y}\right) \operatorname{ch} x, \qquad \text{où} \qquad f(0) = \alpha.$$

217. Les équations différentielles des courbes caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

dont les intégrales sont :

$$(1) \qquad y = cx, \qquad z = c'x^2.$$

D'où l'on déduit les surfaces intégrales

$$z = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

2° $$dz = 2xf\left(\frac{y}{x}\right)dx + (xdy - ydx)f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$d^2z = 2f\left(\frac{y}{x}\right)dx^2 + 2f'\left(\frac{y}{x}\right)(ydx - xdy)\frac{dx}{x} + \left(\frac{xdy - ydx}{x}\right)^2 f''\left(\frac{y}{x}\right) =$$
$$= 2f(t)dx^2 + 2xf'(t)dtdx + x^2 f''(t)dt^2$$

où $y = tx$. L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$2f(t)\left(\frac{dx}{xdt}\right)^2 + 2f'(t)\frac{dx}{xdt} + f''(t) = 0$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{x} = \frac{-f'(t) \pm \sqrt{f'(t)^2 - 2f(t)f''(t)}}{2f(t)}\,dt$$

$$\mathrm{L}x = \int \frac{-f'(t) \pm \sqrt{f'(t)^2 - 2f(t)f''(t)}}{2f(t)}\,dt.$$

3° Si

$$f'(t)^2 - 2f(t)f''(t) = c,$$

on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)^2}{f(t)}\right) = f'(t)\,\frac{2f(t)f''(t) - f'(t)^2}{f(t)^2} = -c\frac{f'(t)}{f(t)^2}$$

$$\frac{f'(t)^2}{f(t)} = \frac{c}{f(t)} + b, \qquad \frac{f'(t)}{\sqrt{c + bf(t)}} = 1$$

$$\sqrt{c + bf(t)} = \frac{b}{2}\,t + a$$

ou

$$f(t) = \mathrm{A}t^2 + 2\mathrm{B}t + \mathrm{C},$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires. On a alors :

$$f'(t)^2 - 2f(t)f''(t) = 4(\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}).$$

La surface

$$z = \mathrm{A}y^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2$$

est un paraboloïde, dont les génératrices rectilignes sont les lignes asymptotiques.

4° Les caractéristiques (1) rencontrent la courbe

$$y = 2x^3, \qquad z = y,$$

si l'on a :

$$c' = 2x, \qquad 2c = 4x^2 = c'^2,$$

La surface, lieu de ces courbes, est :

$$z^2 = 2x^3y, \qquad z = x^2\sqrt{2\frac{y}{x}}, \qquad f(t) = \sqrt{2t}.$$

L'équation (2), qui détermine les lignes asymptotiques, devient :

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{dt}{t}, \qquad \frac{dt}{t} = \frac{dx}{x}\, 2(1 \pm \sqrt{3})$$

$$\mathrm{L}t = 2(1 \pm \sqrt{3})\mathrm{L}x + \mathrm{L}c$$

$$y = cx^{3 \pm 2\sqrt{3}}$$

5° L'équation différentielle de ces courbes, obtenue en éliminant c, sera :

$$\frac{dy}{y} = (3 \pm 2\sqrt{3})\frac{dx}{x}.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales, obtenue en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$, est :

$$xdx + (3 \pm 2\sqrt{3})ydy = 0$$

$$x^2 + (3 \pm 2\sqrt{3})y^2 = c$$

systèmes d'ellipses et d'hyperboles homothétiques.

218. $p\sqrt{y} = \sqrt{z}$ est une équation linéaire. Les caractéristiques sont déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$y = a, \qquad x = 2\sqrt{az} + b.$$

Les surfaces intégrales sont :

$$4yz = (x - f(y))^2.$$

219. Les courbes caractéristiques sont déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}, \qquad y = cx, \qquad z = c'.$$

L'intégrale générale est

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit le cercle

$$x = a, \qquad y^2 + z^2 = R^2,$$

les droites caractéristiques rencontrent ce cercle, si l'on a :

$$a^2c^2 + c'^2 = R^2.$$

Le lieu de ces droites est la surface conoïde :

$$\left(a\frac{y}{x}\right)^2 + z^2 = R^2 \qquad \text{ou} \qquad z = \sqrt{R^2 - a^2\frac{y^2}{x^2}},$$

Si on pose

$$\varphi(t) = \sqrt{R^2 - a^2t^2}$$

les lignes asymptotiques sont les génératrices $y = cx$, et les courbes dont les projections sur le plan xoy sont (problème 163)

$$cx^2 = \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{R^2 - a^2\frac{y^2}{x^2}}} \qquad \text{ou} \qquad y^2 = c^2x^4(R^2x^2 - a^2y^2).$$

220. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{y^2 - x^2 + 2xz} = \frac{dy}{2y(z - x)} = \frac{dz}{0}$$

on en déduit : $z = c$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2(x - c)dx}{x^2 - 2xc - y^2} = \frac{2(x - c)dx + 2ydy}{x^2 - 2xc + y^2}$$

$$Ly = L(x^2 + y^2 - 2xc) - Lc'$$

Les équations des caractéristiques sont :

$$z = c, \qquad x^2 + y^2 - 2xz = c'y.$$

Les surfaces intégrales :

$$x^2 + y^2 - 2xz = 2yf(z)$$

sont engendrées par un cercle dont le plan reste parallèle au plan xoy, dont le centre

$$x = z = c, \qquad y = f(z)$$

décrit une courbe dans le plan $x = z$, ce cercle rencontrant l'axe oz.

Les cercles caractéristiques rencontrent l'ellipse

$$x = 0, \qquad y^2 + 4z^2 = 4a^2,$$

si l'on a

$$z = c, \qquad y = c', \qquad c'^2 + 4c^2 = 4a^2.$$

Le lieu de ces cercles est la surface :

$$(x^2 + y^2 - 2xz)^2 = 4y^2(a^2 - z^2)$$

ou

$$(x - z)^2 + (y \pm \sqrt{a^2 - z^2})^2 = a^2.$$

Les courbes de niveau sont les cercles $z = c$, dont les projections sur le plan xoy peuvent se représenter par l'équation :

$$(x - a \cos t)^2 + (y - a \sin t)^2 = a^2$$
$$x^2 + y^2 = 2a(x \cos t + y \sin t)$$

dont la dérivée donne :

$$xdx + ydy = a\,(\cos t\, dx + \sin t\, dy)$$

on en déduit :

$$2a(ydx - xdy) \cos t = 2xydx + (y^2 - x^2)dy$$
$$2a(ydx - xdy) \sin t = -\,2xydy + (y^2 - x^2)dx.$$

L'élimination de t donne l'équation différentielle de ces cercles :

$$4a^2(ydx - xdy)^2 = (dx^2 + dy^2)\,(x^2 + y^2)^2.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{dx}{dy}$, on a l'équation différentielle des trajectoires orthogonales, projections des lignes de plus grande pente :

$$4a^2(ydy + xdx)^2 = (dy^2 + dx^2)\,(x^2 + y^2)^2.$$

En coordonnées polaires, cette équation devient :

$$4a^2d\rho^2 = \rho^2(d\rho^2 + \rho^2d\omega^2)$$

$$d\omega = \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{4a^2d\rho}{\rho^3\sqrt{\frac{4a^2}{\rho^2} - 1}} - \frac{d\rho}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{4a^2}{\rho^2} - 1} - \text{arc sin}\,\frac{\rho}{2a} + c$$

équation des projections des lignes de plus grande pente.

221. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

$$\frac{xdx - ydy}{0} = \frac{ydx + xdy}{xy(x^2+y^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z}.$$

Les équations des caractéristiques sont :

$$x^2 - y^2 = c, \qquad z = c'xy.$$

Les surfaces intégrales :

$$z = xyf(x^2 - y^2).$$

2° On a :

$$d^2z = 2f(x^2-y^2)dxdy + 4f'(x^2-y^2)(xdy+ydx)(xdx-ydy) +$$
$$+ 2f'(x^2-y^2)xy(dx^2-dy^2) + 4f''(x^2-y^2)xy(xdx-ydy)^2.$$

L'équation des lignes asymptotiques, $d^2z = 0$, doit admettre la solution

$$x^2 - y^2 = c, \qquad xdx - ydy = 0,$$

ce qui donne, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{x}{y}$:

$$f(x^2-y^2) + (y^2-x^2)f'(x^2-y^2) = 0$$

ou

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t}, \qquad f(t) = at$$
$$z = axy(x^2-y^2).$$

L'équation des lignes asymptotiques est alors :

$$(x^2-y^2)dxdy + 2(xdy+ydx)(xdx-ydy) + xy(dx^2-dy^2) = 0$$
$$3(xdx-ydy)(xdy+ydx) = 0.$$

Les projections des deux systèmes sont :

$$x^2 - y^2 = c, \qquad xy = c'.$$

3° Le plan tangent à cette surface a pour équation :

$$Z - aXy(3x^2 - y^2) - aYx(x^2 - 3y^2) = 3axy(y^2 - x^2)$$

ou :

$$\frac{Z}{z} - X\frac{3x^2-y^2}{x(x^2-y^2)} - Y\frac{x^2-3y^2}{y(x^2-y^2)} = -3.$$

Une surface $z = f(x, y)$, dont le plan tangent est :

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

la coupe orthogonalement, si l'on a :

$$\frac{3x^2 - y^2}{x(x^2 - y^2)} p + \frac{x^2 - 3y^2}{y(x^2 - y^2)} q = -\frac{1}{z}$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces cherchées. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{xdx}{3x^2 - y^2} = \frac{ydy}{x^2 - 3y^2} = \frac{zdz}{y^2 - x^2}$$

$$\frac{xdx - ydy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{xdx + ydy}{4(x^2 - y^2)} = \frac{zdz}{y^2 - x^2}$$

$$2(x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 = c, \qquad x^2 + y^2 + 4z^2 = c'.$$

Les surfaces orthogonales ont pour équation :

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = f(x^4 + y^4 - 6x^2y^2).$$

222. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x(x^2 + 3y^2)} = \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2zy^2}.$$

Les deux premiers rapports donnent une équation homogène. En posant $y = tx$, on a :

$$\frac{dy}{2y^3} = \frac{ydx - xdy}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{-tdt}{y^2(1 + t^2)}, \qquad y = \frac{c}{1 + t^2} = \frac{cx^2}{x^2 + y^2}.$$

Les équations des caractéristiques sont :

$$z = c'y, \qquad (x^2 + y^2)y = cx^2.$$

L'intégrale générale est :

$$z = yf\left(y\,\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right).$$

Les courbes caractéristiques rencontrent le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, $z = a$, si l'on a :

$$y = \frac{a}{c'}, \qquad R^2ac' = c(R^2c'^2 - a^2).$$

Le lieu de ces caractéristiques est la surface :

$$aR^2x^2z = (x^2 + y^2)(R^2z^2 - a^2y^2).$$

223. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{y^2 - x^2} = \frac{dz}{0} = \frac{xdx + ydy}{y(x^2 + y^2)}$$

$$z = c, \qquad x^2 + y^2 = c'x.$$

Ces caractéristiques sont des cercles, dont le plan reste parallèle au plan xoy, qui rencontrent oz, le centre décrivant une courbe du plan xoz. Les surfaces intégrales, engendrées par ces cercles, sont :

$$z = f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right).$$

La section, $y = 0$, sera la parobole $z^2 = 2ax$, si $f(x) = \sqrt{2ax}$. On a alors la surface :

$$z^2 = 2a\,\frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Sur cette surface, on a :

$$zdz = a\left(dx + 2\,\frac{y}{x}\,dy - \frac{y^2}{x^2}\,dx\right)$$

$$zd^2z = -dz^2 + 2ax\left(d\,\frac{y}{x}\right)^2.$$

L'équation des lignes asymptotiques, $d^2z = 0$, donne :

$$dz = \pm\sqrt{2ax}\,d\,\frac{y}{x} = \pm\frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,d\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = \pm\frac{d\,\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}, \qquad \mathrm{L}z + \mathrm{L}\,\frac{y \pm \sqrt{y^2 + x^2}}{x} = c'.$$

Les projections, sur le plan xoy, des lignes asymptotiques sont :

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x}}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2} \pm y}{x} = c$$

ou, en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{c^2\cos^3\theta}{(1 \pm \sin\theta)^2} = c^2\cos\theta\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\theta}{2}\right).$$

224. Les équations différentielles des caractéristiques :

$$\frac{dx}{2yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{-xy}$$

ont pour intégrales :

$$2y^2 + x^2 = c, \qquad z^2 - y^2 = c'.$$

L'intégrale générale est

$$z^2 - y^2 = f(2y^2 + x^2).$$

2° Les caractéristiques rencontrent le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = y$, si l'on a :

$$y^2 = -c', \qquad x^2 = c + 2c', \qquad (c + c')^2 = -c'$$

La surface, lieu de ces caractéristiques, a pour équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = y^2 - z^2.$$

3° En posant $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, on a, sur cette surface :

$$2\rho^2(xdx + ydy + zdz) = ydy - zdz.$$

Les équations de la normale sont :

$$\frac{X - x}{2x\rho^2} = \frac{Y - y}{y(2\rho^2 - 1)} = \frac{Z - z}{z(2\rho^2 + 1)}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} 2x\rho^2, & 2\rho^2 dx + 4x\rho d\rho, & dx \\ y(2\rho^2 - 1), & (2\rho^2 - 1)dy + 4y\rho d\rho, & dy \\ z(2\rho^2 + 1), & (2\rho^2 + 1)dz + 4z\rho d\rho, & dz \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 2x\rho^2, & 0, & dx \\ y(2\rho^2 - 1), & -\rho dy + 2yd\rho, & dy \\ z(2\rho^2 + 1), & +\rho dz - 2zd\rho, & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$(zdy - ydz)\,[\rho dx - 2xd\rho] = 0.$$

Le premier système est formé des cercles

$$z = cy, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \pm y\sqrt{1 - c^2},$$

car

$$\frac{2yd\rho - \rho dy}{z} = \frac{2zd\rho - \rho dz}{y} = \frac{zdy - ydz}{\rho^3}.$$

Pour le second système, on a :

$$\frac{dx}{x} = 2\frac{d\rho}{\rho}$$

$$cx = x^2 + y^2 + z^2.$$

Les projections sur le plan xoy sont les coniques

$$2y^2 + (1 - c^2)x^2 + cx = 0.$$

225. Les caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}, \qquad y = cx, \qquad z = c'$$

donnent les surfaces $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$dz = f'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

On doit avoir :

$$f'^2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{a^2x^4}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f'(t) = \frac{a}{1 + t^2}$$

$$f(t) = a \text{ arc tg } (t), \qquad z = a \text{ arc tg } \frac{y}{x}.$$

Sur cette surface, on a :

$$dz = a\,\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Les équations de la normale sont :

$$\frac{X - x}{ay} = \frac{Y - y}{-ax} = \frac{Z - z}{x^2 + y^2}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} ay, & ady, & dx \\ -ax, & -adx, & dy \\ x^2 + y^2, & 2xdx + 2ydy, & a\,\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{a^3}{x^2 + y^2}(xdy - ydx)^2 + a(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = 2a(xdx + ydy)^2$$

ou, en coordonnées polaires :

$$a^2d\omega^2 + \rho^2d\omega^2 = d\rho^2$$

$$d\omega = \pm\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}, \qquad \omega = \mathrm{L}(\rho \pm \sqrt{\rho^2 + a^2}) - \mathrm{L}c$$

$$\rho \pm \sqrt{\rho^2 + a^2} = ce^{\omega}$$

$$\rho \mp \sqrt{\rho^2 + a^2} = -\frac{a^2}{c}e^{-\omega}$$

$$2\rho = ce^{\omega} - \frac{a^2}{c}e^{-\omega}$$

En choisissant la direction de l'axe ox, on peut multiplier c par $\frac{a}{c}$, et ramener cette équation à la forme

$$\rho = \frac{a}{2}(e^{\omega} - e^{-\omega}).$$

Les projections des lignes de courbure s'obtiennent par la rotation de cette courbe autour de l'origine. Par chaque point du plan passent deux courbes.

226. Si on pose

$$z^2 = ax^2 + by^2 + c,$$

on a :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p = \frac{ax}{z}, \qquad \frac{\delta y}{\delta z} = q = \frac{by}{z},$$

on doit avoir :

$$\left(z - \frac{ax^2}{z} - \frac{by^2}{z}\right)^2 + \frac{b}{z^2} = 0$$

et, en remplaçant z^2 par $ax^2 + by^2 + c$,

$$c^2 + b = 0,$$

ce qui donne l'intégrale complète :

$$z^2 = ax^2 - c^2y^2 + c.$$

2° Pour avoir l'intégrale générale, on cherche l'enveloppe des surfaces obtenues en posant $a = \varphi(c)$:

$$z^2 = x^2\varphi(c) - c^2y^2 + c$$
$$0 = x^2\varphi'(c) - 2cy^2 + 1.$$

Une surface intégrale est représentée par les équations

$$y^2 = \frac{1 + x^2\varphi'(c)}{2c}, \qquad z^2 = \frac{c}{2} + x^2\left(\varphi(c) - \frac{c}{2}\varphi'(c)\right)$$

où c est un paramètre variable.

3° La courbe

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

coupe cette surface aux points déterminés par les valeurs de c que l'on obtient en éliminant x, y, z. On a ainsi :

$$\frac{c}{2} - 2cx^2 = 1 + x^2\varphi'(c), \qquad 1 - x^2 = \frac{c}{2} + x^2\left(\varphi(c) - \frac{c}{2}\varphi'(c)\right)$$

en ajoutant ces deux équations, on a :

$$\left(1 - \frac{c}{2}\right)\varphi'(c) + \varphi(c) + 2c + 1 = 0.$$

La courbe sera située sur la surface, si cette équation est vérifiée quel que soit c ; c'est une équation différentielle linéaire qui détermine la fonction $\varphi(c)$. On est conduit à poser

$$\varphi(c) = u(c-2)^2,$$

on a alors :

$$\frac{du}{dc} = 2\frac{2c+1}{(c-2)^3} = \frac{10}{(c-2)^3} + \frac{4}{(c-2)^2}$$

$$u = -\frac{5}{(c-2)^2} - \frac{4}{c-2} = \frac{3-4c}{(c-2)^2}$$

$$\varphi(c) = 3 - 4c$$

on a la surface :

$$y^2 = \frac{1-4x^2}{2c}, \qquad z^2 = \frac{c}{2} + (3-2c)x^2$$

ou :

$$4y^2(z^2 - 3x^2) = (1 - 4x^2)^2.$$

227. Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

on forme les équations différentielles des caractéristiques :

$$\frac{dx}{f'_p} = \frac{dy}{f'_q} = \frac{dz}{pf'_p + qf'_q} = \frac{-dp}{f'_x + pf'_z} = \frac{-dq}{f'_y + qf'_z}$$

dont une intégrale est $f(x, y, z, p, q) = c$, la constante c devant être nulle. On a, pour l'équation $p^2 - q^2 = 2z$

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{-q} = \frac{dz}{p^2 - q^2} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

On en déduit les équations des caractéristiques :

$$p = x + a, \qquad q = bp, \qquad y = c - q, \qquad 2z = p^2 - q^2$$

qui donnent p, q, y et z en fonction de x ; a, b et c sont trois constantes arbitraires.

La fonction z, qui se réduit à $(1+y)^2$ pour $x = 0$, est une surface intégrale qui passe par la courbe $x = 0$, $z = (1+y)^2$. Mais

il faut en outre que, en chaque point de cette courbe, la tangente dont la direction est donnée par les expressions

$$dx = 0, \qquad dz = 2(1 + y)dy,$$

soit située dans le plan tangent à la surface intégrale, dont l'équation se déduit de la relation $dz = pdx + qdy$. C'est-à-dire que l'on aura, en chaque point de cette courbe, $2(1 + y) = q$. On a ainsi 7 équations qui doivent être vérifiées en même temps, et donnent :

$$x = 0, \qquad p = a, \qquad q = ab, \qquad y = c - ab, \qquad 2z = a^2 - a^2b^2$$
$$a^2 - a^2b^2 = 2(1 + c - ab)^2, \qquad 2(1 + c - ab) = ab.$$

Il reste ainsi deux relations entre a, b, c.

La solution $a = 0$, $c = -1$ donnerait $x = z = 0$, $y = -1$ et des caractéristiques qui passent par le point fixe $(0, -1, 0)$ de la courbe donnée. La surface intégrale, lieu de ces caractéristiques, ne contiendrait pas la courbe donnée. Il reste la solution :

$$b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad 1 + c = \frac{3}{2}ab$$

et les caractéristiques

$$y + b(x + a) = c, \qquad 2z = (1 - b^2)(x + a)^2$$

En éliminant a, b, c, on a le lieu de ces caractéristiques, qui est la surface cherchée :

$$z = \left(1 + y \pm x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2.$$

Il y a deux cylindres paraboliques qui répondent à la question.

228. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{p - q} = \frac{dy}{2q - p} = \frac{dz}{p^2 - 2pq + 2q^2} = \frac{dp}{2p} = \frac{dq}{2q}.$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{p - q} = \frac{dp - dq}{2(p - q)}, \qquad \frac{dy}{2q - p} = \frac{d(2q - p)}{2(2q - p)}.$$

Les équations des caractéristiques sont :

$$p - q = 2x + a, \qquad 2q - p = 2y + b, \qquad p = cq$$
$$4z = p^2 - 2pq + 2q^2.$$

Pour en déduire l'intégrale générale, on peut remplacer les constantes a, b, c en fonction des valeurs initiales.

Soit $x_0 = 0$, on aura :

$$cq_0 = q_0 + a, \qquad (2 - c)q_0 = 2y_0 + b, \qquad 4z_0 = q_0^2(c^2 - 2c + 2)$$

qui donnent

$$c - 1 = \frac{\sqrt{4z_0 - q_0^2}}{q_0}, \qquad a = \sqrt{4z_0 - q_0^2}, \qquad b = q_0 - 2y_0 - \sqrt{4z_0 - q_0^2}.$$

Les équations des caractéristiques prennent la forme :

$$x\left(1 - \frac{q_0}{\sqrt{4z_0 - q_0^2}}\right) + y = y_0$$

$$z = \frac{z_0}{4z_0 - q_0^2}\left(2x + \sqrt{4z_0 - q_0^2}\right)^2.$$

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles s'obtient en posant :

$$y_0 = t, \qquad z_0 = \varphi(t), \qquad q_0 = \varphi'(t)$$

où φ est une fonction arbitraire. On a ainsi, en fonction du paramètre t, la surface intégrale :

$$y = t + x\left(\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{4\varphi(t) - \varphi'(t)^2}} - 1\right)$$

$$z = \varphi(t)\left(\frac{2x}{\sqrt{4\varphi(t) - \varphi'(t)^2}} + 1\right)^2.$$

La parabole $x = 0$, $2z = y^2$ rencontre cette surface au point

$$y = t, \qquad z = \varphi(t) = \frac{t^2}{2}.$$

La parabole est située sur la surface, si la fonction $\varphi(t)$ est égale à $\frac{t^2}{2}$, de façon que l'équation $2\varphi = t^2$ soit une identité. On a alors :

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad \varphi'(t) = t$$

$\sqrt{4\varphi - \varphi'^2}$ peut prendre les valeurs $\pm t$, ce qui donne les deux solutions :

$$y = t, \qquad 2z = (t + 2x)^2 = (y + 2x)^2$$

et

$$y = t - 2x, \qquad 2z = (t - 2x)^2 = y^2.$$

Les deux cylindres $2z = y^2$, $2z = (y + 2x)^2$ répondent à la question.

229. L'équation $z = px + qy + p^3$ admet l'intégrale complète $z = ax + by + a^3$, qui donne $p = a$, $q = b$.

L'intégrale générale est l'enveloppe du plan

$$z = xf(t) + ty + f^3(t).$$

Dans le plan $y = 0$, la droite $z = ax + a^3$ reste tangente à la courbe $4x^3 + 27z^2 = 0$. Tout plan tangent à cette courbe est une intégrale complète. Les équations :

$$\begin{aligned} y &= -xf'(t) - 3f^2(t)f'(t) \\ z &= x(f(t) - tf'(t)) + f^2(t)\,(f(t) - 3tf'(t)) \end{aligned}$$

qui déterminent l'intégrale générale, représentent une surface développable passant par la courbe $y = 0$, $4x^3 + 27z^2 = 0$.

On peut aussi former les équations différentielles des caractéristiques :

$$\frac{dx}{x + 3p^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{px + qy + 3p^3} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

qui ont pour intégrales :

$$p = a, \qquad q = b, \qquad y = c(x + 3a^2), \qquad z = ax + by + a^3.$$

Pour $x = 0$, on a :

$$b = q_0, \qquad a^3 = z_0 - y_0q_0, \qquad c = \frac{y_0}{3a^2}.$$

Les équations des caractéristiques prennent la forme :

$$y = \frac{y_0x}{3a^2} + y_0, \qquad z = ax + q_0y + z_0 - y_0q_0, \qquad a = \sqrt[3]{z_0 - y_0q_0}.$$

En posant

$$y_0 = t, \qquad z_0 = f(t), \qquad q_0 = f'(t).$$

On a la surface intégrale :

$$y = x\frac{t}{3(f(t) - tf'(t))^{\frac{2}{3}}} + t$$

$$z = x\frac{f(t) - \frac{2}{3}tf'(t)}{(f(t) - tf'(t))^{\frac{2}{3}}} + f(t).$$

Il est facile de vérifier que cette droite engendre une surface développable, qui passe par la courbe

$$y = 0, \qquad x = -3(f - tf')^{\frac{2}{3}}$$

$$z = 2(tf' - f), \qquad z^2 = -4\frac{x^3}{27}.$$

230. 1° Si

$$z = ax + by + f(x, y),$$

on a

$$p = a + f_x', \qquad q = b + f_y'.$$

L'élimination de a et b donne :

$$z = px + qy + f(x, y) - xf_x' - yf_y'$$

ce qui conduit à l'identité

$$xf'_x + yf'_y = 0$$

c'est une équation entre les dérivées partielles de $f(x, y)$, dont la solution générale est

$$f = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ce qui donne l'équation

$$z = ax + by + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

2° on en déduit :

$$p = a - \frac{y}{x^2} F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$q = b + \frac{1}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = px + qy + F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{2y}{x^3} F' + \frac{y^2}{x^4} F''$$

$$s = \frac{\delta^2 z}{\delta xy} = \frac{\delta p}{\delta y} = -\frac{1}{x^2} F' - \frac{y}{x^3} F''$$

$$t = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{\delta q}{\delta y} = \frac{1}{x^2} F''$$

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

3° L'équation

$$z = px + qy + a\frac{y}{x}$$

est linéaire, les équations différentielles des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - a\frac{y}{x}}$$

ont pour intégrales

$$y = cx, \qquad z - ac = c'x.$$

La surface S a pour équation

$$z - a\frac{y}{x} = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les caractéristiques rencontrent la courbe $z = 0$,

$$x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) + 3a\frac{y}{x} = 0,$$

si l'on a :

$$3c' = 1 + c^3.$$

Le lieu de ces caractéristiques est la surface Σ, dont l'équation est

$$z = a\frac{y}{x} + \frac{x^3 + y^3}{3x^2}.$$

4° Sur la surface S :

$$z = a\frac{y}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

on a :

$$dz = (xdy - ydx)\left(\frac{a}{x^2} + \frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

$$d^2z = (xdy - ydx)\left(-\frac{2adx}{x^3} + \frac{xdy - ydx}{x^3}f''\right).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques, $d^2z = 0$, se décompose, le premier système est formé des génératrices rectilignes

$$y = cx, \qquad z = ac + xf(c).$$

Le second système, en posant $y = tx$, sera représenté par l'équation :

$$f''(t)dt = \frac{2a}{x^2}dx, \qquad f'(t) = c - \frac{2a}{x}$$

ou :

$$\frac{2a}{x} + f'\left(\frac{y}{x}\right) = c.$$

Si $f(t) = \frac{1 + t^3}{3}$, on a, pour la surface Σ :

$$\frac{2a}{x} + \frac{y^2}{x^2} = c, \qquad y^2 - cx^2 + 2ax = 0$$

coniques dont l'origine est un sommet.

5° Le cercle osculateur en o a son centre sur ox. Le cercle

$$y^2 + x^2 + 2bx = 0$$

coupe la conique en deux points confondus en o, et deux points symétriques d'abscisse $x = \frac{2(a - b)}{c + 1}$. Ces points tendent vers o, lorsque $b = a$. Le cercle osculateur a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0,$$

il a avec la courbe un contact du troisième ordre.

Ces coniques sont osculatrices à un cercle fixe, en leur sommet o.

231. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{1} = \frac{dq}{1}.$$

Si on prend l'intégrale $p - q = 2a$, on aura :

$$(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq = 4a^2 + 4(x + y)$$
$$p = a + \sqrt{a^2 + x + y}, \qquad q = -a + \sqrt{a^2 + x + y}$$

on peut en déduire une intégrale complète :

$$dz = pdx + qdy = ad(x - y) + \sqrt{a^2 + x + y}\, d(x + y)$$
$$z = a(x - y) + \frac{2}{3}(a^2 + x + y)^{\frac{3}{2}} + c.$$

La solution générale s'obtient en posant $c = f(a)$, et en cherchant l'enveloppe de ces surfaces

$$z = a(x - y) + \frac{2}{3}(a^2 + x + y)^{\frac{3}{2}} + f(a)$$
$$x - y + 2a\sqrt{a^2 + x + y} + f'(a) = 0.$$

Pour que cette surface passe par l'origine, il faut que l'on ait, en même temps :

$$\frac{2}{3}a^3 + f(a) = 0, \qquad 2a^2 + f'(a) = 0$$

ou

$$f(a) = \varphi(a) - \frac{2}{3}a^3,$$

$\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$ étant nuls pour une même valeur de a, c'est-à-dire que l'équation $\varphi(a) = 0$ doit avoir une racine double, qui correspond à l'origine.

On peut également intégrer les équations des caractéristiques, et mettre ces intégrales sous la forme :

$$p - q = 2a, \qquad 2x - q^2 = b, \qquad z = 4ax + \frac{2}{3}(2x - b)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(x + y)^2 = (2x - b)(2y + b + 4a^2).$$

On peut chercher la surface passant par une courbe donnée. qui passe par l'origine ; on exprimera les coordonnées d'un point de la courbe, x, y, z, en fonction d'un paramètre t, on exprimera que la caractéristique rencontre cette courbe, et que l'on a

$$z' = px' + qy' \qquad \text{ou} \qquad z' = 2ax' + (x' + y')\sqrt{2x - b}$$

ce qui donne trois équations entre a, b, c et t. L'élimination de t donne deux équations entre a, b, c, qui définissent les caractéristiques qui doivent engendrer la surface intégrale.

232. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{y} = \frac{dq}{x}$$

on en déduit :

$$x^2 = q^2 + a, \qquad y^2 = p^2 - b$$

$$x^2y^2 = p^2q^2 = (x^2 - a)(y^2 + b), \qquad ay^2 - bx^2 + ab = 0$$

$$ay^2 = b(x^2 - a) = bq^2.$$

On peut alors poser :

$$y = cq, \qquad p = cx, \qquad \text{et} \qquad dz = 2pdx = 2cxdx, \qquad z = cx^2 + \beta.$$

Les équations des caractéristiques sont :

$$y = cq, \qquad p = cx, \qquad y^2 - c^2x^2 = \alpha, \qquad z = cx^2 + \beta.$$

Ces courbes rencontrent l'hyperbole

$$x = 1, \qquad z^2 = 1 + y^2,$$

si l'on a

$$y^2 = c^2 + \alpha = z^2 - 1 = (c + \beta)^2 - 1$$

ce qui donne, entre les trois constantes c, α, β, la relation

$$\alpha + 1 = \beta^2 + 2c\beta.$$

Mais il faut, en outre, qu'en chaque point de l'hyberbole, la tangente, qui se déduit des relations

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{0},$$

soit dans le plan tangent à la surface, déduit de l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

ce qui donne :

$$y = qz \qquad \text{et} \qquad z = c = c + \beta$$

donc

$$\beta = 0, \qquad \alpha = -1.$$

Les caractéristiques

$$z = cx^2, \qquad y^2 - c^2x^2 + 1 = 0$$

engendrent la surface intégrale

$$z^2 = x^2(1 + y^2), \qquad \text{ou} \qquad z = x\sqrt{1 + y^2},$$

qui, pour $x = 1$, donne

$$z = \sqrt{1 + y^2}.$$

233. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y + 2q} = \frac{dz}{qy - px + 2q^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{3q} = \frac{d(2y + q)}{2y + q}$$

qui donnent :

$$p = cx, \qquad (2y + q)x = b, \qquad q = ax^3$$
$$2z = px - qy - q^2.$$

Pour $x_0 = 1$, on a

$$a = q_0, \qquad b = 2y_0 + q_0, \qquad c = p_0 = 2z_0 + q_0y_0 + q_0^2.$$

Les caractéristiques sont représentées par les équations :

$$(2y + q_0x^3)x = 2y_0 + q_0$$
$$2z = (2z_0 + q_0y_0 + q_0^2)x^2 - q_0x^3y - q_0^2x^6.$$

En posant

$$y_0 = t, \qquad z_0 = f(t), \qquad q_0 = f'(t),$$

on a une courbe qui engendre une surface intégrale.

On peut également former une intégrale complète en prenant les relations :

$$q = ax^3, \qquad p = \frac{2z}{x} + ax^2y + a^2x^5$$

$$dz = \left(\frac{2z}{x} + ax^2y + a^2x^5\right)dx + ax^3dy$$

$$\frac{xdz - 2zdx}{x^3} = a(ydx + xdy) + a^2x^3dx$$

$$\frac{z}{x^2} = axy + \frac{a^2}{4}x^4 + b.$$

En posant $b = f(a)$, une surface intégrale, enveloppe de ces surfaces, est donnée par les équations :

$$y = -\frac{a}{2}x^3 - \frac{1}{x}f'(a)$$

$$z = x^2(f(a) - af'(a)) - \frac{a^2}{4}x^6$$

où a est un paramètre variable.

234. Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = \frac{dp}{pz} = \frac{dq}{qz}$$

ou

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{dz}{z}.$$

On peut mettre les intégrales sous la forme

$$p = z\cos a, \qquad q = z\sin a, \qquad x = (b + \mathrm{L}z)\cos a$$
$$y = (c + \mathrm{L}z)\sin a.$$

En prenant les intégrales $p = z\cos a$, $q = z\sin a$, qui vérifient l'équation $p^2 + q^2 = z^2$, on aura une intégrale complète :

$$\frac{dz}{z} = \cos a\,dx + \sin a\,dy$$

$$\mathrm{L}z = x\cos a + y\sin a + b$$

on en déduit la solution générale :

$$\mathrm{L}z = x\cos t + y\sin t + f(t)$$
$$x\sin t - y\cos t = f'(t).$$

On peut aussi déduire la solution générale des courbes caractéristiques ; en prenant la valeur initiale $x = 0$, on aura

$$b = -\mathrm{L}z_0, \qquad \sin a = \frac{q_0}{z_0}, \qquad c = y_0 \frac{z_0}{q_0} - \mathrm{L}z_0.$$

En fonction des trois constantes y_0, z_0, q_0, les courbes caractéristiques ont pour équations

$$y = \frac{q_0}{z_0} \mathrm{L} \frac{z}{z_0} + y_0, \qquad x = \sqrt{1 - \frac{q_0}{z_0^2}} \mathrm{L} \frac{z}{z_0}.$$

En posant

$$y_0 = t, \qquad z_0 = \varphi(t), \qquad q_0 = \varphi'(t),$$

les surfaces intégrales seront définies par les équations

$$y = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \mathrm{L} \frac{z}{\varphi(t)} + t, \qquad x = \sqrt{1 - \frac{\varphi'^2(t)}{\varphi^2(t)}} \mathrm{L} \frac{z}{\varphi(t)}$$

où φ est une fonction arbitraire

235. On a

$$\frac{\delta^3 u}{\delta y \delta z \delta x} = \frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x}, \qquad \frac{\delta^3 u}{\delta z \delta x \delta y} = \frac{\delta \mathrm{B}}{\delta y}, \qquad \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\delta \mathrm{C}}{\delta z}.$$

Si la fonction u existe, on doit avoir identiquement :

$$\frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x} = \frac{\delta \mathrm{B}}{\delta y} = \frac{\delta \mathrm{C}}{\delta z}.$$

Si ces conditions sont remplies, en considérant y et z comme constants, $\frac{\delta u}{\delta z}$ est une fonction de x dont la dérivée est B.

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{B} dx + f(y, z).$$

La dérivée de $\frac{\delta u}{\delta z}$ par rapport à y doit être égale à A :

$$\mathrm{A} = \int_{x_0}^{x} \frac{\delta \mathrm{B}}{\delta y} dx + f_y' = \int_{x_0}^{x} \frac{\delta \mathrm{A}}{\delta x} dx + f_y' = \mathrm{A}(x, y, z) - \mathrm{A}(x_0, y, z) + f_y'$$

$$f_y'(y, z) = \mathrm{A}(x_0, y, z), \qquad f(y, z) = \int_{y_0}^{y} \mathrm{A}(x_0, y, z) dy + \varphi'(z)$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{B} dx + \int_{y_0}^{y} \mathrm{A}(x_0, y, z) dy + \varphi'(z)$$

où $\varphi'(z)$ est une fonction arbitraire. En considérant z comme seul variable, on en déduit :

$$u = \int_{z_0}^{z} dz \int_{x_0}^{x} \mathrm{B}dx + \int_{z_0}^{z} dz \int_{y_0}^{y} \mathrm{A}(x_0, y, z)dy + \varphi(z) + \psi(x, y).$$

En prenant la dérivée par rapport à x, on a :

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \int_{z_0}^{z} \mathrm{B}dz + \psi_x'(x, y)$$

sa dérivée par rapport à y doit être égale à C

$$\mathrm{C} = \int_{z_0}^{z} \frac{\delta \mathrm{B}}{\delta y} dz + \psi_{xy}'' = \int_{z_0}^{z} \frac{\delta \mathrm{C}}{\delta z} dz + \psi_{xy}'' = \mathrm{C} - \mathrm{C}(x, y, z_0) + \psi_{xy}''$$

$$\psi_{xy}''(x, y) = \mathrm{C}(x, y, z_0)$$

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} \mathrm{C}(x, y, z_0)dy + f_1(x) + f_2(y).$$

Il existe donc une fonction $u(x, y, z)$ à laquelle on peut ajouter

$$f_1(x) + f_2(y) + \varphi(z),$$

ces trois fonctions étant arbitraires.

On peut ainsi choisir arbitrairement la fonction de z, $u(x_0, y_0, z)$ pour les valeurs initiales de x et y, et de même les fonctions analogues de x et y

$$u(x, y_0, z_0) = \mathrm{F}_1(x), \qquad u(x_0, y, z_0) = \mathrm{F}_2(y),$$
$$u(x_0, y_0, z) = \mathrm{F}_3(z)$$

ces trois fonctions étant telles que

$$\mathrm{F}_1(x_0) = \mathrm{F}_2(y_0) = \mathrm{F}_3(z_0).$$

En particulier, si l'on a :

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} = y^2 + z^2, \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta z \delta x} = z^2 + x^2, \qquad \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = x^2 + y^2,$$

on en déduit :

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \int_0^x (z^2 + x^2)dx + \int_0^y (y^2 + z^2)dy + \varphi'(z) =$$

$$= \frac{x^3 + y^3}{3} + z^2(x + y) + \varphi'(z)$$

$$u = \frac{x^3 + y^3}{3} z + \frac{z^3}{3} (x + y) + \varphi(z) + \psi(x, y)$$

et

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \psi''_{xy} = x^2 + y^2$$

$$\psi = \frac{yx^3 + xy^3}{3} + f_1(x) + f_2(y)$$

$$u = \frac{x^3 + y^3}{3} z + \frac{y^3 + z^3}{3} x + \frac{z^3 + x^3}{3} y + f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$u = \frac{x + y + z}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z)$$

236. Si on considère u, ainsi que x et y, comme des fonctions de z et θ, considérés comme variables indépendantes, on a :

$$dx = e^z(\cos\theta\, dz - \sin\theta\, d\theta)$$
$$dy = e^z(\sin\theta\, dz + \cos\theta\, d\theta)$$
$$d^2x = e^z(\cos\theta\, dz^2 - 2\sin\theta\, d\theta\, dz - \cos\theta\, d\theta^2)$$
$$d^2y = e^z(\sin\theta\, dz^2 + 2\cos\theta\, d\theta\, dz - \sin\theta\, d\theta^2)$$
$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy = \frac{\delta u}{\delta z} dz + \frac{\delta u}{\delta \theta} d\theta$$
$$d^2u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx^2 + 2\frac{\delta^2 u}{\delta xy} dx\, dy + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dy^2 + \frac{\delta u}{\delta x} d^2x + \frac{\delta u}{\delta y} d^2y.$$

D'autre part :

$$\delta^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} dz^2 + 2\frac{\delta^2 u}{\delta z\theta} dz d\theta + \frac{\delta^2 u}{\delta \theta^2} d\theta^2.$$

En remplaçant dx, dy, d^2x, d^2y par leurs valeurs, et en écrivant que, dans les expressions de d^2u, les coefficients de dz^2, $dzd\theta$ et $d\theta^2$ sont identiques, on a les relations :

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = e^{2z}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\delta^2 u}{\delta xy}\sin\theta\cos\theta + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\sin^2\theta\right) + \\ + e^z\left(\frac{\delta u}{\delta x}\cos\theta + \frac{\delta u}{\delta y}\sin\theta\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z\theta} = e^{2z}\left(-\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\delta^2 u}{\delta xy}\cos 2\theta + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\sin\theta\cos\theta\right) + \\ + e^z\left(-\frac{\delta u}{\delta x}\sin\theta + \frac{\delta u}{\delta y}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta \theta^2} = e^{2z}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\sin^2\theta - 2\frac{\delta^2 u}{\delta xy}\sin\theta\cos\theta + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\cos^2\theta\right) + \\ - e^z\left(\frac{\delta u}{\delta x}\cos\theta + \frac{\delta u}{\delta y}\sin\theta\right)$$

on en déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = e^{2z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

de sorte que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ conserve la même forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Si

$$u = f(x + yi) + \varphi(x - yi)$$

f et φ étant des fonctions analytiques, qui ont des dérivées secondes, on en déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' + \varphi', \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = i(f' - \varphi')$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' + \varphi'', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = i^2(f'' + \varphi'') = -f'' - \varphi''$$

l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ est vérifiée.

On aura

$$x + yi = e^z(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{z+\theta i}$$

$$x - yi = e^z(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{z-\theta i}$$

$f(x + yi) = f\left(e^{z+\theta i}\right)$ sera une fonction arbitraire de $z + \theta i$, et $\varphi(x - yi)$ devient une fonction arbitraire de $z - \theta i$.

237. On a :

$$df = f'(\rho)d\rho = f'(\rho)\,\frac{xdx + ydy + zdz}{\rho}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\rho}f'(\rho), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\rho}f'(\rho), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\rho}f'(\rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\right)f'(\rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\right)f'(\rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{z^2}{\rho^2}f''(\rho) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\right)f'(\rho)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(\rho) + \frac{2}{\rho}f'(\rho).$$

2° Si on pose, en coordonnées polaires :

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\theta$$

l'élément de volume est $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$

$$\iiint\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz=\iiint\left(f''+\frac{2}{\rho}f'\right)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Entre deux sphères de centre o, de rayons a et b, on devra faire varier θ de o à π, φ de o à 2π, ρ de a à b. On a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_a^b (\rho^2 f''+2\rho f')d\rho =$$
$$= 4\pi(\rho^2 f'(\rho))_a^b = 4\pi(b^2 f'(b)-a^2 f'(a)).$$

3° La fonction $f(\rho)$ devra vérifier l'équation différentielle

$$f''(\rho)+\frac{2}{\rho}f'(\rho)+\frac{1}{4\rho^2}f(\rho)=0$$

c'est une équation linéaire, qui a des solutions de la forme $f=\rho^\alpha$, où

$$\alpha(\alpha-1)+2\alpha+\frac{1}{4}=0$$
$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ étant une racine double, la solution générale est

$$f(\rho)=c_1\rho^{-\frac{1}{2}}+c_2\rho^{-\frac{1}{2}}\mathrm{L}\rho.$$

238. L'équation aux dérivées partielles

$$p\sqrt{x}+q\sqrt{-y}=0$$

donne les équations différentielles des caractéristiques :

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{-y}}=\frac{dz}{0},$$

(1) $$\sqrt{x}+\sqrt{-y}=c,\qquad z=c'.$$

Dans le plan yoz, l'équation différentielle donnée peut s'écrire :

$$\frac{dy}{2-2y^2-3z(1-y)}=\frac{dz}{2-3z+z^2}=\frac{dy-dz}{-2y^2+3yz-z^2}$$
$$\frac{\frac{dy}{1-y}}{2+2y-3z}=\frac{\frac{dz}{z-2}}{z-1}=\frac{\frac{d(y-z)}{y-z}}{z-2y}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dy}{1-y} + \frac{2dz}{z-2} + \frac{d(y-z)}{y-z} = 0$$

$$\frac{(y-z)(z-2)^2}{y-1} = a, \qquad x = 0.$$

Une courbe caractéristique (1) coupera cette courbe, si l'on a :

$$y = -c^2, \qquad (c^2 + c')(c'-2)^2 = a(1+c^2).$$

En éliminant c et c' on a la surface, lieu de ces courbes :

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{-y}\right)^2 \left[(z-2)^2 - a\right] = a - z(z-2)^2$$

cette surface passera par le point

$$x = 1, \qquad y = -1, \qquad z = 0$$

si

$$4(4-a) = a, \qquad a = \frac{16}{5}$$

$$x - y + 2\sqrt{-xy} = \frac{16 - 5z(z-2)^2}{-16 + 5(z-2)^2}.$$

On pourrait remplacer $\sqrt{-y}$ par $-\sqrt{-y}$, ce qui donne la surface

$$\left(x - y - 2\sqrt{-xy}\right)\left[(z-2)^2 - a\right] = a - z(z-2)^2$$

qui passe par le point donné si $a = 0$, on a alors la surface conique

$$(x - y + z)^2 + 4xy = 0$$

qui passe par la droite $x = 0$, $y = z$, solution de l'équation donnée.

239. L'équation aux dérivées partielles

$$z^2(p^2 + q^2) = 3a^2$$

donne les équations différentielles des caractéristiques

$$\frac{dx}{pz^2} = \frac{dy}{qz^2} = \frac{dz}{(p^2+q^2)z^2} = \frac{-dp}{pz(p^2+q^2)} = \frac{-dq}{qz(p^2+q^2)}$$

qui donne $q = cp$; en tenant compte de l'équation donnée, on aura :

$$zp\sqrt{1+c^2} = a\sqrt{3}$$

$$dx = \frac{dy}{c} = \frac{zdz}{a\sqrt{3}(1+c^2)}$$

ce qui donne le système d'intégrales des caractéristiques :

$$y = cx + c', \qquad z^2 = 2ax\sqrt{3(1+c^2)} + c''$$

$$pz = a\sqrt{\frac{3}{1+c^2}}, \qquad qz = ac\sqrt{\frac{3}{1+c^2}}$$

qui déterminent les courbes caractéristiques, et le plan tangent à la surface en chaque point d'une caractéristique.

Une caractéristique rencontre la courbe

$$x = 0 \qquad z^2 = 2ay\sqrt{2}$$

si l'on a :

$$y = c', \qquad z^2 = c'' = 2ac'\sqrt{2}.$$

La tangente à cette courbe

$$\frac{X - x}{0} = \frac{Y - y}{z} = \frac{Z - z}{a\sqrt{2}}.$$

doit, en outre, être dans le plan tangent à la surface, ce qui donne la relation :

$$qz = a\sqrt{2} = ac\sqrt{\frac{3}{1+c^2}}, \qquad c = \sqrt{2}, \qquad \text{et} \qquad c'' = 2ac'\sqrt{2}.$$

Le lieu des caractéristiques définies par ces deux relations sera la surface intégrale, cylindre parabolique :

$$z^2 = 6ax + 2a\sqrt{2}\left(y - x\sqrt{2}\right)$$

ou

$$z^2 = 2ax + 2ay\sqrt{2}.$$

240. Les équations différentielles des caractéristiques de l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{a^2}{z^2}$$

sont :

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = \frac{-z^3 dp}{pa^2} = \frac{-z^3 dq}{qa^2}.$$

L'intégrale $q = c'p$ donne, en posant $c' = \operatorname{tg} c$:

$$p = \sqrt{a^2 - z^2}\,\frac{\cos c}{z}, \qquad q = \sqrt{a^2 - z^2}\,\frac{\sin c}{z}$$

on en déduit une intégrale complète par la relation

$$dz = pdx + qdy = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{z}(\cos c dx + \sin c dy)$$

$$\sqrt{a^2 - z^2} = c' - x \cos c - y \sin c$$

ou

$$a^2 = z^2 + (x \cos c + y \sin c - c')^2$$

c'est l'équation d'un cylindre de révolution autour d'une droite du plan xoy, et de rayon a constant. Tous ces cylindres restent tangents aux plans $z = \pm a$, et l'on peut vérifier que $z = \pm a$, $p = q = 0$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles, c'est la solution singulière.

2° La solution générale sera donnée par les équations :

$$\sqrt{a^2 - z^2} = f(t) - x \cos t - y \sin t$$
$$f'(t) + x \sin t - y \cos t = 0.$$

La surface représentée par ces deux équations coupe le plan $z = b$, suivant une courbe qui est l'enveloppe de la droite

$$x \cos t + y \sin t = f(t) - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Pour que cette enveloppe soit le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, il faut que

$$f(t) - \sqrt{a^2 - b^2} = R$$

$f(t)$ est constant, et la surface est représentée par les équations

$$x \cos t + y \sin t = R + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - z^2}$$
$$x \sin t - y \cos t = 0$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = R + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a^2 - z^2}$$

c'est un tore, surface de révolution autour de oz, la méridienne étant le cercle

$$\left(y - R - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + z^2 = a^2.$$

3° L'intégrale complète considérée représente un cylindre de révolution de rayon a, dont l'axe est dans le plan xoy. Si cet axe reste tangent à une courbe c, l'enveloppe du cylindre est engendrée par un cercle de rayon a dont le centre décrit la courbe c, le plan reste normal à la courbe c. En particulier, si c est un cercle de centre o, la surface engendrée est un tore.

On peut encore prendre l'intégrale complète

$$(x - c)^2 + (y - c')^2 + z^2 = a^2$$

$$pz = c - x, \qquad qz = c' - y, \qquad z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2$$

et considérer l'intégrale générale comme l'enveloppe d'une sphère de rayon a, dont le centre décrit une courbe du plan xoy.

CHAPITRE X

—

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

241. Le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

coupe la droite $Z = 0$, $\frac{Y}{y} = \frac{X}{x}$ en un point donné par les équations :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{px + qy - z}{px + qy}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{px + qy - z}{px + qy}\sqrt{x^2 + y^2}$$

ce qui donne l'équation aux dérivées partielles :

$$px\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) + qy\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) = z\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Les courbes caractéristiques sont déterminées par les équations différentielles

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)}{z\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Ly = Lx + c, \qquad Lz = L\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) + c'.$$

Les équations des courbes caractéristiques sont :

$$y = cx, \qquad z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)c'.$$

Cette courbe rencontre la parabole $x = R$, $y^2 = 2az$, si l'on a :

$$2az = c^2R^2, \qquad z = c'\left(\sqrt{R^2 + 2az} - R\right)$$

$$c^2R^2 = 2ac'R\left(\sqrt{1 + c^2} - 1\right).$$

Le lieu de ces courbes est la surface cherchée :

$$y^2R\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right) = 2azx\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$$

$$(x^2 + y^2)(Ry^2 - 2axz)^2 = (R^2y^2 - 2ax^2z)^2$$

et, en divisant par y^2 :

$$4a^2x^2z^2 - 4axz\mathrm{R}(x^2 + y^2 - \mathrm{R}x) + \mathrm{R}^2y^2(x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2) = 0$$
$$2axz = \mathrm{R}\left[x^2 + y^2 - \mathrm{R}x \pm (\mathrm{R} - x)\sqrt{x^2 + y^2}\right].$$

Surface engendrée par la droite

$$y = cx, \qquad z = \frac{\mathrm{R}}{2a}\left[x + c^2x - \mathrm{R} \pm (\mathrm{R} - x)\sqrt{1 + c^2}\right].$$

242. La normale

$$\frac{\mathrm{X} - x}{p} = \frac{\mathrm{Y} - y}{q} = \frac{\mathrm{Z} - z}{-1}$$

forme avec oz un angle dont le cosinus est

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

La projection de z sur la normale est

$$a = \frac{z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces S est :

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = \frac{z^2}{a^2} - 1.$$

2° Si u et v sont deux constantes arbitraires, la relation :

$$a\mathrm{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} = x\cos u + y\sin u + v$$

est une intégrale complète ; on en déduit, en effet :

$$\frac{adz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \cos u dx + \sin u dy$$

$$p = \sqrt{z^2 - a^2}\,\frac{\cos u}{a}, \qquad q = \sqrt{z^2 - a^2}\,\frac{\sin u}{a}, \qquad p^2 + q^2 = \frac{z^2 - a^2}{a^2}.$$

Il en résulte qu'une intégrale quelconque est définie par les équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} x\cos u + y\sin u + f(u) = a\mathrm{L}\,\dfrac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \\ -x\sin u + y\cos u + f'(u) = 0 \end{cases}$$

qui donnent l'enveloppe de la surface précédente.

3° Ces deux équations déterminent x et y en fonction de u et z. On en déduit :

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos u dx + \sin u dy = \dfrac{a dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \\ \sin u dx - \cos u dy = \big(f''(u) - x \cos u - y \sin u\big) du \end{cases}$$

$$p = \frac{\cos u}{a}\sqrt{z^2 - a^2}, \qquad q = \frac{\sin u}{a}\sqrt{z^2 - a^2}$$

$$dx + p dz = \frac{z^2 \cos u}{a\sqrt{z^2 - a^2}} dz + \sin u\left(f'' + f - a\mathrm{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right) du$$

$$dy + q dz = \frac{z^2 \sin u}{a\sqrt{z^2 - a^2}} dz - \cos u\left(f'' + f - a\mathrm{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right) du.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire :

$$\frac{dx + p dz}{dp} = \frac{dy + q dz}{dq}$$

$$\frac{\dfrac{z^2 \cos u}{a\sqrt{z^2 - a^2}} dz + \sin u\left(f'' + f - a\mathrm{L}\,\dfrac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right) du}{-\sin u\sqrt{z^2 - a^2}\, du + \dfrac{z \cos u}{\sqrt{z^2 - a^2}} dz} =$$

$$= \frac{\dfrac{z^2 \sin u}{a\sqrt{z^2 - a^2}} dz - \cos u\left(f'' + f - a\mathrm{L}\,\dfrac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right) du}{\cos u\sqrt{z^2 - a^2}\, du + \dfrac{z \sin u}{\sqrt{z^2 - a^2}} dz}.$$

En développant, les termes en du^2 et dz^2 disparaissent, et cette équation se réduit à $du dz = 0$. Les lignes de courbure sont définies par $u = c$, et $z = c'$.

Ce résultat pouvait se prévoir, car la normale en un point de la surface S,

$$\frac{X - x}{\cos u} = \frac{Y - y}{\sin u} = \frac{Z - z}{-a}\sqrt{z^2 - a^2}$$

est aussi normale à la surface mobile, définie par la première des équations.

Si u est constant, elle décrit le plan

$$-X \sin u + Y \cos u + f'(u) = 0$$

et on a bien une ligne de courbure.

Si z est constant, la normale à la surface forme avec le plan XOY

un angle constant, dont le cosinus est $\frac{a}{z}$. On peut en déduire que cette normale engendre une surface développable.

4° La courbe rencontrera le cercle $z = a$, $x^2 + y^2 = 2\lambda x$, si les 4 équations en x, y, z sont vérifiées en même temps. On en déduit :

$$x \cos u + y \sin u = -f(u), \qquad f^2 + f'^2 = x^2 + y^2 = 2\lambda x$$

$$f^2 + f'^2 = 2\lambda(f' \sin u - f \cos u)$$

$$(f'(u) - \lambda \sin u)^2 + (f(u) + \lambda \cos u)^2 = \lambda^2$$

$$f'(u) - \lambda \sin u = \sqrt{\lambda^2 - (f(u) + \lambda \cos u)^2}$$

$$\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{f(u)}{\lambda} + \cos u\right) = u + c$$

$$f(u) = \lambda \cos(u + c) - \lambda \cos u = -2\lambda \sin\frac{c}{2} \sin\left(u + \frac{c}{2}\right).$$

On aurait pu prendre le signe $\pm$ devant le radical, mais on arrive au même résultat en changeant c en $c + \pi$.

5° Des équations (2) on déduit les relations (3) et, si u et z sont considérés comme fonctions des variables indépendantes x et y :

$$d^2z = \frac{zdz^2}{z^2 - a^2} + \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{a}(\cos u dy - \sin u dx)du.$$

Les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle,

$$d^2z = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{azdz^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} - du^2\left(f'' + f - a\mathrm{L}\,\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right) = 0.$$

Pour la fonction particulière

$$f(u) = \lambda \cos(u + c) - \lambda \cos u,$$

on a

$$f(u) + f''(u) = 0.$$

Les lignes asymptotiques sont déterminées par la quadrature :

$$u = \pm \int \frac{\sqrt{z}\,dz}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{\mathrm{L}\,\frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}}}.$$

243. Le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

coupe oz au point P

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = z - px - qy.$$

La droite PM a pour équations :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - z + px + qy}{px + qy}.$$

Pour le point Q, on a :

$$Z = 0, \qquad X = x - \frac{xz}{px + qy},$$

ce qui donne l'équation aux dérivées partielles :

$$px + qy = \frac{xz}{x - a}.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz(x - a)}{xz}$$

$$y = cx, \qquad z = c'(x - a).$$

Les surfaces intégrales

$$z = (x - a) f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sont engendrées par les droites

$$y = cx, \qquad z = (x - a) f(c).$$

2° Une courbe caractéristique rencontre le cercle

$$z = a, \qquad x^2 + y^2 = ax,$$

si l'on a :

$$x'(1 + c^2) = a, \qquad c' = \frac{a}{x - a} = -\frac{1 + c^2}{c^2}$$

le lieu de ces caractéristiques est la surface :

$$zy^2 = (a - x)(x^2 + y^2).$$

Sur cette surface, on a :

$$dz = -\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) dx + 2x(a - x) \frac{ydx - xdy}{y^3}$$

$$d^2z = \frac{ydx - xdy}{y^4} [-4xydx + 2(a - x)(ydx - 3xdy)] = 0.$$

Pour une ligne asymptotique $d^2z = 0$, la première solution $ydx = xdy$ donne les génératrices

$$y = cx, \qquad z = (a - x)\left(1 + \frac{1}{c^2}\right),$$

ce que l'on pouvait prévoir.

Pour le second système de lignes asymptotiques, on a :

$$\frac{2dx}{a-x} - \frac{dx}{x} + 3\frac{dy}{y} = 0$$

$$2L(a-x) + Lx = 3Ly - 3Lc$$

$$y = c\sqrt[3]{x(a-x)^2}$$

$$y' = c\frac{a-3x}{3\sqrt[3]{x^2(a-x)}}$$

$$y - cx = cx\frac{a^2 - 2ax}{x^2 + x\sqrt[3]{x(a-x)^2} + (a-x)\sqrt[3]{x^2(a-x)}}$$

pour $x = \infty$, cette expression tend vers $-\frac{2}{3}ac$, il y a une asymptote

$$y = cx - \frac{2}{3}ac.$$

Supposons a et c positifs, de $x = 0$ à $x = \frac{a}{3}$, y augmente. De $x = \frac{a}{3}$ à $x = a$, y diminue, puis augmente indéfiniment. O est un point d'inflexion, $x = a$, $y = 0$ est un point de rebroussement.

3° Une courbe caractéristique

$$y = cx, \qquad z = c'(x-a)$$

rencontre la droite

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y + z = 0,$$

si l'on a :

$$\frac{ac}{2} - c'\frac{a}{2} = 0, \qquad c = c',$$

la surface, lieu de ces courbes, a pour équation :

$$xz = y(x-a).$$

Les génératrices rectilignes

$$y = cx, \qquad z = c(x-a)$$

rencontrent oz. En un point x, y, z de la surface, cette génératrice a pour équations

$$\frac{X-x}{x} = \frac{Y-y}{y} = \frac{Z-z}{y},$$

puisque $c = \frac{y}{x}$.

Pour une courbe quelconque tracée sur la surface, on a :

$$xdz = (y - z)dx + (x - a)dy$$

cette courbe est perpendiculaire à la génératrice au point (x, y, z), si

$$xdx + ydy + ydz = 0.$$

Les projections sur le plan xoy seront déterminées par l'équation différentielle

$$\frac{x}{y}(xdx + ydy) + y\frac{a}{x}dx + (x - a)dy = 0$$

$$(x^3 + ay^2)dx + xy(2x - a)dy = 0$$

$$\frac{dx}{x(a - 2x)} = \frac{ydy}{x^3 + ay^2} = \frac{xdx + 2ydy}{a(x^2 + 2y^2)}$$

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{a - 2x}\right)dx = \frac{d(x^2 + 2y^2)}{x^2 + 2y^2}$$

$$x^2 + 2y^2 = c\left(\frac{x}{a - 2x}\right)^2.$$

244. La normale

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

coupe le plan $z = 0$ au point N,

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz.$$

La distance MN de N au plan tangent

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

est :

$$\frac{z(1 + p^2 + q^2)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

La distance de l'origine à ce plan tangent est :

$$\frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Si les points O et N ne sont pas du même côté du plan tangent, on a la relation :

$$OP \times MN = z(px + qy - z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$px + qy = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{z}.$$

Pour intégrer cette équation, il faut former les équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = \frac{xdx + ydy + zdz}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'x^4.$$

Une surface intégrale est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^4 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

La normale

$$\frac{X - x}{2x - 4x^3 f + yx^2 f'} = \frac{Y - y}{2y - x^3 f'} = \frac{Z - z}{2z}$$

forme avec la droite

$$\frac{X - x}{y} = \frac{Y - y}{-x} = \frac{Z - z}{0}$$

perpendiculaire au plan MOZ, un angle dont le cosinus est

$$\cos\alpha = \frac{-4yx^3 f\left(\frac{y}{x}\right) + (x^2 + y^2)x^2 f'\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{-12x^4 f + 16x^6 f^2 - 8x^5 y f f' + (x^2 + y^2)x^4 f'^2}}.$$

Pour qu'une section plane soit une ligne de courbure, il faut qu'en tous les points de la section cet angle soit constant. Pour que les sections $y = cx$ soient des lignes de courbure, il faut que $\cos\alpha$ soit constant en même temps que $\frac{y}{x}$, ou soit une fonction de $\frac{y}{x}$. Soit $y = tx$

$$\cos\alpha = \frac{-4tf(t) + (1 + t^2)f'}{\sqrt{1 + t^2}\sqrt{-\frac{12}{x^2}f + 16f^2 - 8tff' + (1 + t^2)f'^2}}.$$

Comme $f(t)$ ne peut pas être identiquement nul, $\cos\alpha$ ne peut être indépendant de x, et fonction de t seul, que s'il reste nul, alors

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{4t}{1 + t^2}$$

$$\mathrm{L}f(t) = 2\mathrm{L}(1 + t^2) + \mathrm{L}c$$

$$f(t) = c(1 + t^2)^2$$

on a les surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = c(x^2 + y^2)^2.$$

Surfaces de révolution autour de oz.

Si on avait supposé les points O et N du même côté du plan tangent à la surface, on aurait l'équation :

$$z(z - px - qy) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$px + qy = -\frac{x^2 + y^2}{z}$$

qui donne les caractéristiques :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{-zdz}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$
$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'$$

et les surfaces intégrales

$$x^2 + y^2 + z^2 = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les surfaces dont les lignes de courbures sont les sections passant par oz sont les sphères

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

pour lesquelles

$$OP = OM = MN = R.$$

245. La normale a pour projection la droite $\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q}$, et la droite OM, $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$. Ces deux droites sont perpendiculaires si

(1) $$px + qy = 0.$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles, il faut former les équations des caractéristiques :

(2) $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}, \qquad y = cx, \qquad z = c'.$$

L'intégrale générale est

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

2° Les génératrices $y = cx$, $z = f(c)$ sont des lignes asymptotiques. Celles du second système seront données par l'équation (problème 163).

$$2\frac{dx}{x} = \frac{f''\left(\frac{y}{x}\right)}{f'\left(\frac{y}{x}\right)} d\frac{y}{x}, \qquad f'\left(\frac{y}{x}\right) = c''x^2$$

3° à cause de la relation (1) l'équation du plan tangent se réduit à :

$$pX + qY - Z + z = 0$$

il forme avec le plan XOY l'angle γ,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

la distance de l'origine à ce plan tangent est :

$$\frac{z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = z\cos\gamma.$$

Soit $d\sigma$ un élément de surface infiniment petit, $ds = d\sigma\cos\gamma$ sa projection sur le plan XOY. Le volume v, qui projette cette aire sur le plan XOY, est $v = zds$. Le volume v' du cône de sommet O et de base $d\sigma$ est

$$v' = \frac{1}{3}z\cos\gamma d\sigma = \frac{1}{3}zds = \frac{v}{3}.$$

La même relation $V = 3V'$ a lieu entre les volumes de base σ, somme d'éléments de surfaces $d\sigma$.

4° Les courbes caractéristiques (2) coupent la courbe $x = a$

$$y = ae^{\frac{z}{a}},$$

si

$$y = ac = ae^{\frac{c'}{a}}, \qquad c' = aLc.$$

La surface, lieu de ces courbes, est

$$z = aL\frac{y}{x}.$$

On a alors :

$$V = \iint aL\frac{y}{x}\,dxdy, \qquad x < y < a, \qquad 0 < x < a$$

$$V = a\int_0^a dx\int_x^a (Ly - Lx)dy = a\int_0^a dx\left(yLy - y - yLx\right)_{y=x}^{a} =$$

$$= a\int_0^a \left(x - a - aL\frac{x}{a}\right)dx = a\left(\frac{x^2}{2} - axL\frac{x}{a}\right)_0^a = \frac{a^3}{2}.$$

246. Le plan tangent, $Z - pX - qY = z - px - qy$, coupe

oz au point $Z = z - px - qy$; on a l'équation aux dérivées partielles :

$$px + qy = z(1 - a)$$

2° Les caractéristiques sont déterminées par les équations

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(1-a)}$$

$$y = cx, \qquad z = c'x^{1-a}$$

les surfaces intégrales sont :

$$z = x^{1-a} f\left(\frac{y}{x}\right).$$

3° Les droites D et oP ont pour coefficients angulaires $-\frac{p}{q}$ et $\frac{y}{x}$, elles forment un angle α,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{px + qy}{qx - py}.$$

Pour ces surfaces, on a

$$p = (1 - a)x^{-a} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{-1-a} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$q = x^{-a} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 - a)x^{1-a} f\left(\frac{y}{x}\right)}{(x^2 + y^2)x^{-1-a} f'\left(\frac{y}{x}\right) - (1 - a)yx^{-a} f\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Si α est constant, soit $\frac{y}{x} = t$, on a :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = (1 - a)\frac{t + \operatorname{cotg} \alpha}{1 + t^2}$$

$$\mathrm{L} f(t) = (1 - a)\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}(1 + t^2) + \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{arc\,tg} t\right) + c$$

$$f(t)^{\frac{1}{1-a}} = c'\sqrt{1 + t^2}\, e^{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{arc\,tg} t}.$$

Les surfaces intégrales sont représentées par les équations :

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega$$

$$z^{\frac{1}{1-a}} = c\rho e^{\omega \operatorname{cotg} \alpha}.$$

4° Sur cette surface on a, si ρ et ω sont les variables indépendantes :

$$\frac{1}{1-a}\frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + \operatorname{cotg}\alpha d\omega$$

$$\frac{1}{1-a}\frac{d^2z}{z} = \frac{1}{1-a}\left(\frac{dz}{z}\right)^2 - \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)^2.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$\frac{dz}{z} = \pm\frac{d\rho}{\rho}\sqrt{1-a}$$

ou :

$$\operatorname{cotg}\alpha d\omega = \frac{d\rho}{\rho}\left(-1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = b d\omega, \qquad b = \operatorname{cotg}\alpha\,\frac{1-a\pm\sqrt{1-a}}{a}$$

$$\rho = ce^{b\omega}.$$

247. Le plan tangent

$$Z - pX - qY = z - px - qy$$

coupe les axes aux points,

$$X = \frac{px+qy-z}{p}, \qquad Y = Z = 0;$$

$$Y = \frac{px+qy-z}{q}, \qquad X = Z = 0;$$

et

$$Z = z - px - qy, \qquad X = Y = 0.$$

Le centre de gravité du triangle, dont ces trois points sont les sommets, a pour coordonnées :

$$X = \frac{px+qy-z}{3p}, \qquad Y = \frac{px+qy-z}{3q}, \qquad Z = \frac{z-px-qy}{3},$$

Pour qu'il coïncide avec le point (x, y, z), il faut que l'on ait :

$$2px - qy + z = 0, \qquad 2qy - px + z = 0, \qquad px + qy + 2z = 0.$$

Mais ces trois équations se réduisent à deux :

$$px + z = 0, \qquad qy + z = 0.$$

Si elles ont une solution commune, on aura :

$$p = -\frac{z}{x}, \qquad q = -\frac{z}{y}$$

$$dz = pdx + qdy = -z\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right)$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

et la surface

$$xyz = c.$$

248. La normale

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

coupe le plan xoy au point

$$Z = 0, \qquad X = x + pz, \qquad Y = y + qz.$$

Le point symétrique par rapport à o,

$$X = -x - pz, \qquad Y = -y - qz, \qquad Z = 0$$

sera dans le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

si l'on a :

$$z = p(2x + pz) + q(2y + qz)$$

$$(1) \qquad 2(px + qy) + z(p^2 + q^2 - 1) = 0.$$

2° Un cylindre parabolique parallèle à oy, dont la base serait une parabole de foyer o, de directrice parallèle à oz, a pour équation

$$z^2 = a^2 - 2ax.$$

Si on fait tourner les axes autour de oz, on a l'équation générale des cylindres qui correspondent à l'énoncé

$$(2) \qquad z^2 = a^2 - 2a(x \cos \alpha - y \sin \alpha)$$

cette fonction z est une solution de l'équation (1), car on en déduit :

$$pz = -a \cos \alpha, \qquad qz = a \sin \alpha$$

$$(p^2 + q^2)z^2 = a^2, \qquad z(px + qy) = a(y \sin \alpha - x \cos \alpha) = \frac{z^2 - a^2}{2}.$$

3° La solution (2), qui contient deux constantes arbitraires a, α, est une intégrale complète.

4° Les équations différentielles des caractéristiques de (1) sont :

$$\frac{dx}{f_p'} = \frac{dy}{f_q'} = \frac{dz}{pf_p' + qf_q'} = \frac{-dp}{f_x' + pf_z'} = \frac{-dq}{f_y' + qf_z'}$$

$$\frac{dx}{2(x+pz)} = \frac{dy}{2(y+qz)} = \frac{dz}{2(px+qy+zp^2+zq^2)} =$$

$$= \frac{-dp}{p(p^2+q^2+1)} = \frac{-dq}{q(p^2+q^2+1)}.$$

En tenant compte de l'équation (1), le dénominateur de dz se réduit à $z(p^2+q^2+1)$, et l'on a :

$$\frac{dz}{z} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q}, \qquad pz = c, \qquad qz = c'.$$

On a alors

$$\frac{dx}{x+c} = \frac{dy}{y+c'}, \qquad y + c = c''(x+c).$$

L'équation (1) donne enfin :

$$2(cx + c'y) = z^2 - c^2 - c'^2.$$

249. La normale

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

coupe le plan xoy au point N,

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz.$$

Le plan tangent le coupe suivant la droite

$$p(X-x) + q(Y-y) + z = 0.$$

La distance de N à cette droite est

$$\delta = \frac{z(1+p^2+q^2)}{\sqrt{p^2+q^2}} = f(z)$$

on a ainsi l'équation aux dérivées partielles des surfaces S :

$$z^2(1+p^2+q^2)^2 = (p^2+q^2)f(z)^2$$

ou

$$(1) \qquad p^2 + q^2 = \frac{f(z)^2 - 2z^2 \pm f(z)\sqrt{f(z)^2 - 4z^2}}{2z^2} =$$

$$= \left(\frac{f(z) \pm \sqrt{f(z)^2 - 4z^2}}{2z}\right)^2.$$

2° Soit $Z = \varphi(z)$ la nouvelle fonction inconnue ; on a

$$P = \frac{\delta\varphi(z)}{\delta x} = p\varphi'(z), \qquad Q = q\varphi'(z)$$

$$P^2 + Q^2 = \varphi'^2(z)\left(\frac{f(z) \pm \sqrt{f(z)^2 - 4z^2}}{2z}\right)^2.$$

Si l'on pose

$$\varphi(z) = \int \frac{2zdz}{f(z) \pm \sqrt{f(z)^2 - 4z^2}}$$

on sera ramené à $P^2 + Q^2 = 1$.

Cette équation admet l'intégrale complète

$$Z = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c$$

pour laquelle

$$P = \cos \alpha, \qquad Q = \sin \alpha.$$

Et pour l'équation (1)

$$\varphi(z) = x \cos \alpha + y \sin \alpha + c.$$

L'intégrale générale de l'équation (1) sera donnée par les deux équations :

$$\varphi(z) = x \cos \alpha + y \sin \alpha + F(\alpha) \tag{2}$$

$$0 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + F'(\alpha). \tag{3}$$

Si z est constant, ces équations représentent la courbe enveloppe de la droite (2), dont la distance à l'origine est $F(\alpha) - \varphi(z)$. Lorsque z varie, les projections de ces courbes sur le plan xoy sont des courbes parallèles.

3° Pour une courbe quelconque de la surface S, définie par les équations (2) et (3), on a :

$$(4) \quad \begin{cases} x = (\varphi(z) - F(\alpha)) \cos \alpha + F'(\alpha) \sin \alpha \\ y = (\varphi(z) - F(\alpha)) \sin \alpha - F'(\alpha) \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = \varphi'(z) \cos \alpha\, dz - (\varphi(z) - F(\alpha) - F''(\alpha)) \sin \alpha\, d\alpha \\ dy = \varphi'(z) \sin \alpha\, dz + (\varphi(z) - F(\alpha) - F''(\alpha)) \cos \alpha\, d\alpha \end{cases}$$

si

$$z = c, \qquad dz = 0, \qquad \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{dy}{-\cos \alpha},$$

une courbe a sa tangente perpendiculaire à celle de la section $z = c$, si l'on a :

$$\sin \alpha\, dx - \cos \alpha\, dy = 0$$

$$[\varphi(z) - F(\alpha) - F''(\alpha)]d\alpha = 0$$

c'est-à-dire

$$d\alpha = 0, \qquad \alpha = c.$$

Et, en effet, la surface est engendrée par des courbes situées dans les plans $z = c$, dont les projections sur xoy sont des courbes parallèles. En chaque point d'une de ces courbes, la normale à la surface

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\sin\alpha} = \frac{Z - z}{-\varphi'(z)}$$

forme avec l'axe oz un angle constant, dont la cotangente est $\varphi'(z)$. Les trajectoires orthogonales sont représentées par les équations (4), où α est constant et z variable.

250. Si z est constant, la section est un cercle

$$\left(x - \frac{f(z)}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}f^2(z),$$

de rayon $\frac{1}{2}f(z)$, dont la surface est $\frac{\pi}{4}f^2(z)$. Le volume est :

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^c f^2(z)dz$$

Le centre de gravité de ce volume est donné par les expressions :

$$XV = \iiint x\,dx\,dy\,dz, \qquad YV = \iiint y\,dx\,dy\,dz,$$

$$ZV = \iiint z\,dx\,dy\,dz$$

où

$$x^2 + y^2 < xf(z) \qquad \text{et} \qquad 0 < z < c.$$

Lorsque z est constant, on peut poser :

$$x = \frac{1}{2}f(z) + \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

$$0 < \omega < 2\pi, \qquad 0 < \rho < \frac{1}{2}f(z)$$

le point (x, y) restant à l'intérieur du cercle, section de la surface par le plan $z =$ const. On a alors, dans ce plan, l'élément de surface $\rho d\rho d\omega$, qui remplacera $dx\,dy$, et

$$XV = \iiint \left(\frac{1}{2}f(z) + \rho\cos\omega\right)\rho\,d\rho\,d\omega\,dz$$

$$YV = \iiint \rho^2\sin\omega\,d\rho\,d\omega\,dz, \qquad ZV = \iiint \rho z\,d\rho\,d\omega\,dz.$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} \sin\omega\, d\omega = \int_0^{2\pi} \cos\omega\, d\omega = 0.$$

On a donc $Y = 0$, ce qui résulte de la symétrie du volume par rapport au plan xoz.

$$XV = \pi \iint \rho f(z) d\rho\, dz = \frac{\pi}{2} \int f(z)\rho^2 dz = \frac{\pi}{8} \int_0^c f^3(z) dz$$

$$ZV = 2\pi \iint \rho z\, d\rho\, dz = \pi \int z\rho^2\, dz = \frac{\pi}{4} \int_0^c z f^2(z) dz$$

ou

$$2X \int_0^c f^2(z) dz = \int_0^c f^3(z) dz$$

$$Z \int_0^c f^2(z) dz = \int_0^c z f^2(z) dz.$$

Si μ est la masse de l'unité de volume, le moment d'inertie par rapport à oz est

$$I = \mu \iiint (x^2+y^2) dx dy dz = \mu \iiint \left(\frac{1}{4} f^2(z) + f(z)\rho\cos\omega + \rho^2\right) \rho d\rho d\omega dz$$

$$= 2\mu\pi \iint_0^c \left(\frac{1}{4} f^2(z) + \rho^2\right) \rho d\rho dz = \frac{\mu\pi}{4} \int (f^2(z) + 2\rho^2)\rho^2 dz$$

$$= \frac{\mu\pi}{4} \int_0^c \frac{3}{8} f^4(z) dz = \frac{3\mu\pi}{32} \int_0^c f^4(z) dz.$$

2° Si $f(z) = \sqrt{c^2 - z^2}$, on aura le volume :

$$V = \frac{\pi}{4} \int_0^c (c^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{4} \left(c^2 z - \frac{z^3}{3}\right)_0^c = \frac{\pi}{6} c^3.$$

Les coordonnées du centre de gravité :

$$\frac{4}{3} X c^3 = \int_0^c (c^2 - z^2) \sqrt{c^2 - z^2}\, dz$$

$$\frac{2}{3} Z c^3 = \int_0^c z(c^2 - z^2) dz = \left(c^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)_0^c = \frac{c^4}{4}.$$

En posant $z = c \sin t$, on a :

$$\frac{4}{3} X = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = \frac{c}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{c}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt = \frac{c}{4} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$X = \frac{9}{64} \pi c, \qquad Y = 0, \qquad Z = \frac{3}{8} c.$$

3° Sur la surface S, on a

$$2(x\,dx + y\,dy) = f(z)dx + xf'(z)dz$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - f(z)}{xf'(z)}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{xf'(z)}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{2x - f}{2y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

l'équation aux dérivées partielles des surfaces S est

$$2xy\,p + q(y^2 - x^2) = 0.$$

Les courbes caractéristiques sont les cercles

$$x^2 + y^2 = ax, \qquad z = c.$$

4° Le plan tangent à la surface S a pour équation :

$$(2x - f(z))X + 2yY - xf'(z)Z = 2(x^2 + y^2) - xf(z) - xzf'(z) =$$
$$= x(f(z) - zf'(z))$$

il rencontre l'axe oz au point $X = Y = 0$,

$$Z = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

qui est le même pour tous les points de la section circulaire $z = \text{const.}$

251. La normale à la surface,

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

coupe le plan xoy au point

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz, \qquad Z = 0.$$

La distance de ce point à la projection $(x, y, 0)$ de M est

$$z\sqrt{p^2 + q^2} = \pm a$$

on a l'équation aux dérivées partielles

$$z^2(p^2 + q^2) = a^2.$$

2° Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{pz^2} = \frac{dy}{qz^2} = \frac{dz}{a^2} = \frac{-dp}{zp(p^2 + q^2)} = \frac{-dq}{zq(p^2 + q^2)}.$$

Si on prend l'intégrale de l'équation

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \qquad q = cp,$$

de l'équation aux dérivées partielles on déduit

$$p^2 = \frac{a^2}{z^2(1 + c^2)}, \qquad q^2 = \frac{a^2c^2}{z^2(1 + c^2)}$$

on peut poser

$$p = \frac{a}{z}\cos\gamma, \qquad q = \frac{a}{z}\sin\gamma$$

$$dz = \frac{a}{z}(\cos\gamma\, dx + \sin\gamma\, dy)$$

on a l'intégrale complète

$$z^2 = 2a(x\cos\gamma + y\sin\gamma) + c'$$

où γ et c' sont deux constantes arbitraires.

3° En tenant compte des relations $qz = a\sin\gamma$, $pz = a\cos\gamma$, les équations différentielles des caractéristiques donnent :

$$dy = \operatorname{tg}\gamma\, dx, \qquad adx = z\cos\gamma\, dz.$$

Les caractéristiques ont pour équations :

$$y = x\operatorname{tg}\gamma + c, \qquad pz = a\cos\gamma, \qquad qz = a\sin\gamma,$$
$$z^2\cos\gamma = 2ax + b$$

où b, c, γ sont trois constantes arbitraires.

Ce sont des paraboles, dans des plans parallèles à oz, dont les axes sont dans le plan xoy. Ces paraboles sont toutes égales, en faisant tourner les axes de l'angle γ autour de oz, on ramène en effet leur équation, dans leur plan, à

$$z^2 = 2aX + \frac{b}{\cos\gamma} - 2ac\sin\gamma.$$

On peut remplacer les trois constantes en fonction des valeurs initiales

$$x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, \quad \text{où} \quad p_0^2 + q_0 = \frac{a^2}{z_0^2}$$

$$\cos\gamma = \frac{p_0 z_0}{a}, \quad \sin\gamma = \frac{q_0 z_0}{a}, \quad b = \frac{p_0 z_0^3}{a} - 2ax_0, \quad c = y_0 - x_0 \frac{q_0}{p_0}$$

les équations de la courbe caractéristique sont alors

$$y - y_0 = \frac{q_0}{p_0}(x - x_0), \qquad 2a(x - x_0) = (z^2 - z_0^2)\frac{p_0 z_0}{a},$$

$$pz = p_0 z_0, \qquad qz = q_0 z_0.$$

Ces équations définissent une parabole, et, en chaque point (x, y, z) de cette courbe, le plan

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) = \frac{z_0}{z}\left(p_0 X + q_0 Y - p_0 x - q_0 y\right),$$

qui est perpendiculaire au plan $q_0(X - x_0) = p_0(Y - y_0)$ de la parabole. L'élément donné définit un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et un plan $P_0(p_0, q_0)$ passant par ce point. La caractéristique correspondante est dans le plan passant par M_0, parallèle à oz, et perpendiculaire au plan P_0, son axe est dans le plan xoy. La tangente en M_0 est dans le plan P_0, cette parabole est ainsi déterminée, car elle est égale à la parabole ayant pour équation (dans son plan) $y^2 = 2ax$. En chaque point de cette caractéristique les valeurs p, q déterminent le plan passant par la tangente à la parabole, et perpendiculaire à son plan.

4° Les surfaces intégrales qui passent par le point (x, y, z) sont tangentes au plan

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \quad \text{où} \quad p^2 + q^2 = \frac{a^2}{z^2}.$$

Ces plans peuvent se représenter par l'équation

$$Z - z = \frac{a}{z}[(X - x)\cos\gamma + (Y - y)\sin\gamma]$$

où γ est une constante arbitraire. L'enveloppe de ces plans, lorsque γ varie, est le cône de révolution

$$(Z - z)^2 \frac{z^2}{a^2} = (X - x)^2 + (Y - y)^2.$$

On appelle courbe intégrale, une courbe qui, en chaque point,

est tangente au cône qui a son sommet en ce point. Ces courbes doivent vérifier l'équation différentielle :

$$z^2dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

qui exprime que la tangente à la courbe est une génératrice du cône. Pour déterminer ces courbes intégrales, on peut choisir arbitrairement la relation $y = f(z)$ et l'on a une équation différentielle entre x et z.

5° Les courbes caractéristiques qui passent par le point $(0, 0, z_0)$ ont pour équations :

$$y = x \operatorname{tg} \gamma, \qquad (z^2 - z_0^2) \cos \gamma = 2ax.$$

Le lieu de ces courbes est la surface :

$$z^2 - z_0^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il est facile de vérifier que c'est une surface intégrale.

6° Si une surface intégrale contient la droite $x = y = z$, en un point $x_0 = y_0 = z_0$ le plan tangent doit passer par la droite, ce qui donne

$$p_0 + q_0 = 1, \qquad p_0^2 + q_0^2 = \frac{a^2}{z_0^2}$$

$$p_0 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2z} - \frac{1}{4}}.$$

On a les caractéristiques

$$y - x_0 = (x - x_0)\frac{1 - p_0}{p_0}, \qquad (z^2 - x_0^2)p_0x_0 = 2a^2(x - x_0)$$

ou, en posant $x_0 = t$:

$$(x + y - 2t)p_0 = x - t, \qquad (z^2 - t^2)t = 2a^2(x + y - 2t)$$

$$x - y = \pm (x + y - 2t)\sqrt{\frac{2a^2}{t^2} - 1}$$

aux deux signes $\pm$ correspondent deux nappes de surface, qui se coupent sur la droite $x = y = z$, et correspondent aux deux plans tangents.

7° Les courbes intégrales situées dans le plan $z = x$ doivent vérifier l'équation différentielle

$$a^2dy^2 = (x^2 - a^2)dx^2$$

$$\pm 2ady = 2\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \left(\frac{2x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)dx$$

$$\pm 2ay = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c.$$

La courbe qui passe par le point $x = z = a$, $y = 0$ sera :

$$x = z, \qquad \pm 2ay = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \mathrm{L}\,\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

cette courbe c peut se représenter par les équations :

$$x = z = \frac{a}{\sin t}, \qquad y = \frac{a}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \mathrm{L}\cot\mathrm{g}\,\frac{t}{2}\right)$$

le signe $\pm$ est inutile ; car, si on change t en $\pi - t$, x ne change pas, et y change de signe.

8° Une surface intégrale peut être engendrée par les caractéristiques qui sont tangentes à une courbe intégrale. A chaque valeur de t correspond un point de la courbe intégrale c, la tangente en ce point est déterminée par

$$dx = dz = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,dt, \qquad dy = -a\,\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}\,dt$$

la courbe caractéristique

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\gamma + c, \qquad z^2\cos\gamma = 2\,ax + b$$

passera par ce point, et aura même tangente, si

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \cot\mathrm{g}\,t, \qquad \cos\gamma = \frac{a}{z} = \sin t$$

qui donnent $\gamma = \frac{\pi}{2} - t$, et

$$b = -\frac{a^2}{\sin t}, \qquad c = -\frac{a}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \mathrm{L}\cot\mathrm{g}\,\frac{t}{2}\right)$$

on a les caractéristiques :

$$y = x\cot\mathrm{g}\,t - \frac{a}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \mathrm{L}\cot\mathrm{g}\,\frac{t}{2}\right)$$

$$z^2\sin t = 2ax - \frac{a^2}{\sin t}$$

ces équations, où t est un paramètre variable, représentent une surface intégrale.

252. Le plan tangent

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y)$$

coupe le plan xoy suivant la droite

$$p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} = px + qy - z.$$

La droite qui joint o à la projection de M, a pour équation

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x},$$

elle coupe le plan tangent au point :

$$X = x\,\frac{px + qy - z}{px + qy}, \qquad Y = y\,\frac{px + qy - z}{px + qy}$$

la distance de ce point à l'origine est

$$\frac{px + qy - z}{px + qy}\sqrt{x^2 + y^2} = b$$

on a l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(px + qy)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right) = z\sqrt{x^2 + y^2}$$

où le radical peut être changé de signe.

Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - b}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - b}$$

$$y = cx, \qquad z = c'\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right).$$

Une surface intégrale sera le lieu de ces courbes, obtenu en établissant une relation arbitraire entre c et c'. Les courbes caractéristiques rencontrent la parabole

$$x = b, \qquad y^2 = 2az,$$

si l'on a :

$$y = bc, \qquad y^2 = 2ac'\left(\sqrt{b^2 + y^2} - b\right)$$

$$b^2c^2 = 2ac'b\left(\sqrt{1 + c^2} - 1\right), \qquad c' = b\,\frac{1 + \sqrt{1 + c^2}}{2a}.$$

On a ainsi les courbes caractéristiques

$$y = cx, \qquad z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)b\,\frac{1 + \sqrt{1 + c^2}}{2a}$$

qui engendrent la surface intégrale :

$$z = b\,\frac{x^2 + y^2 - bx + (x - b)\sqrt{x^2 + y^2}}{2ax}$$

où $\sqrt{x^2 + y^2}$ peut être pris par le signe $\pm$.

253. Le point m a pour coordonnées x, y, o, le point N est l'intersection de la droite, $Z = o$, $Y = -\frac{x}{y}X$, perpendiculaire au plan OMm, et du plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ce point a pour coordonnées,

$$X = y\frac{px + qy - z}{py - qx}, \qquad Y = -x\frac{px + qy - z}{py - qx}, \qquad Z = o$$

on a donc :

$$\frac{px + qy - z}{py - qx}\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit l'équation

$$px + qy - z = py - qx$$
$$p(x - y) + q(x + y) = z$$

c'est une équation linéaire aux dérivées partielles, dont les caractéristiques seront déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{z}$$

$$z = c\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \frac{1}{2}L(x^2 + y^2) = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + c'$$

ou, en employant des coordonnées polaires dans le plan xoy :

$$z = c\rho, \qquad \rho = c''e^{\omega}.$$

Les surfaces intégrales sont :

$$z = \rho f(\rho e^{-\omega}).$$

Si on prenait le signe — pour le radical, il suffirait de changer le signe de y, celui de q changeant en même temps, ce qui revient à une transformation d'axes.

2° Les caractéristiques rencontrent la courbe

$$y = o, \qquad z^2 = 2x, \qquad \text{ou} \qquad \omega = o, \qquad z^2 = 2\rho,$$

si l'on a :

$$\rho = c'', \qquad c^2 = \frac{z^2}{\rho^2} = \frac{2}{c''}.$$

Le lieu de ces caractéristiques est la surface :

$$z^2 = 2\rho e^{\omega}.$$

3° Sur cette surface, si ρ et ω sont les variables, on a :

$$z = \sqrt{2\rho}\, e^{\frac{\omega}{2}}, \qquad dz = \frac{e^{\frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2\rho}}(d\rho + \rho d\omega)$$

$$d^2z = \frac{e^{\frac{\omega}{2}}}{2\sqrt{2\rho}}\left(\rho d\omega^2 - \frac{d\rho^2}{\rho} + 2d\rho d\omega\right).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$d\rho^2 - 2\rho d\rho d\omega - \rho^2 d\omega^2 = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho d\omega} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\mathrm{L}\rho = (1 \pm \sqrt{2})\,\omega + c.$$

Les projections des lignes asymptotiques sont les spirales

$$\rho = c' e^{a\omega}, \qquad a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

254. Le plan tangent

$$\mathrm{Z} - p\mathrm{X} - q\mathrm{Y} = z - px - qy$$

coupe l'axe OZ au point

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = z - px - qy.$$

On a l'équation :

$$z - px - qy = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

équation linéaire aux dérivées partielles, dont les caractéristiques sont déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - k\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

$$y = cx, \qquad \frac{dz}{z - k\rho} = \frac{d\rho}{\rho}, \qquad k\frac{d\rho}{\rho} + \frac{\rho dz - zd\rho}{\rho^2} = 0$$

$$\frac{z}{\rho} + k\mathrm{L}\rho = c'.$$

L'intégrale générale est

$$z + k\rho\mathrm{L}\rho = \rho f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{k}{2}\,\mathrm{L}(x^2 + y^2)\right).$$

Soit l'hélice

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = aht.$$

La caractéristique

$$y = cx, \qquad \frac{z}{\rho} + k\mathrm{L}\rho = c'$$

rencontre l'hélice si l'on a :

$$\operatorname{tg} t = c, \qquad c' = k\mathrm{L}a + h \operatorname{arc\,tg} c.$$

Le lieu de ces caractéristiques est la surface intégrale :

$$\frac{z}{\rho} + k\mathrm{L}\rho = k\mathrm{L}a + h \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega \\ z = \rho\left(k\mathrm{L}\dfrac{a}{\rho} + h\omega\right) \end{array}\right.$$

surface engendrée par des hélices, qui correspondent à $\rho = c$, et dont la tangente forme un angle constant avec oz. Les sections $z = c$ sont des spirales logarithmiques.

255. Les équations différentielles des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{p^2 + q^2} = \frac{dp}{\mathrm{U}_x'} = \frac{dq}{\mathrm{U}_y'}.$$

Les courbes caractéristiques sont définies par des équations donnant y, z, p, q en fonction de x, la tangente en un point a ses cosinus directeurs proportionnels à p, q, $2\mathrm{U}(x, y)$. Soit une surface intégrale $z = f(x, y)$ passant par cette caractéristique, la section $z = c$ aura sa tangente définie par l'équation $o = pdx + qdy$, ses cosinus directeurs sont proportionnels à q, $-p$, o, ce qui montre qu'elle est perpendiculaire à la caractéristique.

2° Sur une courbe caractéristique, on a, si x est la variable indépendante :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}, \qquad p^2(1 + y'^2) = 2\mathrm{U}(x, y)$$

$$y'' = \frac{p\dfrac{dq}{dx} - q\dfrac{dp}{dx}}{p^2} = \frac{\mathrm{U}_y' - \dfrac{q}{p}\mathrm{U}_x'}{p^2} = \frac{\mathrm{U}_y' - y'\mathrm{U}_x'}{2\mathrm{U}}(1 + y'^2).$$

Comme U est une fonction donnée de x et y, c'est une équation différentielle du second ordre entre y et la variable x, que vérifient les projections des caractéristiques.

3° Si les projections sont

$$y^2 + x^2 + 2ax + b = 0,$$

on aura

$$yy' + x + a = 0, \qquad yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

On doit avoir

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = -\frac{1}{y} = \frac{U_y' - y'U_x'}{2U}.$$

La relation

$$\frac{2U}{y} + U_y' - y'U_x' = 0$$

doit être une identité, il faut donc $U_x' = 0$, U est une fonction de y seul,

$$\frac{U_y'}{U} + \frac{2}{y} = 0, \qquad U = \frac{a}{y^2}.$$

4° Si à l'équation

$$p^2 + q^2 = \frac{2a}{y^2}$$

on joint l'intégrale des caractéristiques $p = c$, on a

$$q = \sqrt{\frac{2a}{y^2} - c^2}$$

$$dz = cdx + \sqrt{\frac{2a}{y^2} - c^2}\,dy = cdx + \left(\frac{2a}{y^2\sqrt{\frac{2a}{y^2} - c^2}} - \frac{c^2y}{\sqrt{2a - c^2y^2}}\right)dy$$

$$z = cx + \sqrt{2a - c^2y^2} - \sqrt{2a}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a - c^2y^2}}{y} + c'$$

c'est une intégrale complète.

Les caractéristiques sont déterminées par les équations

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{\frac{2a}{y^2}} = \frac{dp}{0} = \frac{y^3dq}{-2a}$$

qui donnent :

$$p = c, \qquad p^2 + q^2 = \frac{2a}{y^2}$$

puis

$$dx = \frac{cydy}{\sqrt{2a - c^2y^2}}, \qquad dz = \frac{2ady}{y^2\sqrt{\frac{2a}{y^2} - c^2}}$$

$$cx + \sqrt{2a - c^2y^2} = c', \qquad z = -\sqrt{2a}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a - c^2y^2}}{y} + c''.$$

Une caractéristique rencontrant la droite $x = z = 0$ engendrera une surface intégrale, si le plan tangent passe par cette droite oy, ou si $q = 0$, ce qui donne :

$$p^2 = c^2 = \frac{2a}{y^2}, \qquad c' = 0, \qquad c'' = \sqrt{2a}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2a}}{y}$$

et

$$c'' = \sqrt{2a}\,\mathrm{L}c.$$

On a alors les caractéristiques :

$$cx + \sqrt{2a - c^2y^2} = 0, \qquad z = -\sqrt{2a}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{2a - c^2y^2}}{cy}$$

qui engendrent la surface

$$z = -\sqrt{2a}\,\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$$

ou

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = ye^{-\frac{z}{\sqrt{2a}}}.$$

256. Un point du cylindre d'axe oz a pour coordonnées

$$x = \mathrm{R}\cos\omega, \qquad y = \mathrm{R}\sin\omega, \qquad z$$

supposons z fonction de ω, ce point décrira une courbe dont la tangente a pour équations :

$$\frac{\mathrm{X} - x}{-\mathrm{R}\sin\omega} = \frac{\mathrm{Y} - y}{\mathrm{R}\cos\omega} = \frac{\mathrm{Z} - z}{z'}$$

cette tangente coupe le plan xoy au point :

$$\mathrm{Z} = 0, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{R}\left(\cos\omega + \frac{z}{z'}\sin\omega\right), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\left(\sin\omega - \frac{z}{z'}\cos\omega\right).$$

Ce point sera sur un cercle de centre o, si sa distance à o est constante

$$\mathrm{R}^2\left(1 + \frac{z^2}{z'^2}\right) = \mathrm{C}$$

ou si $\frac{z'}{z}$ est constant. Soit $\frac{z'}{z} = a$

$$z = \frac{b}{a} e^{a\omega}, \qquad z' = be^{a\omega}.$$

On a la courbe c

$$x = \mathrm{R} \cos \omega, \qquad y = \mathrm{R} \sin \omega, \qquad z = \frac{b}{a} e^{a\omega}$$

dont la tangente coupe le plan xoy au point

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}(\cos \omega + \frac{1}{a} \sin \omega), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{R}(\sin \omega - \frac{1}{a} \cos \omega)$$

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^2 (1 + a^2).$$

2° Sur cette courbe, on a :

$$dx = -\mathrm{R} \sin \omega d\omega, \qquad dy = \mathrm{R} \cos \omega d\omega, \qquad dz = be^{a\omega} d\omega$$

$$ds^2 = (\mathrm{R}^2 + b^2 e^{2a\omega}) d\omega^2$$

$$ds = \frac{\mathrm{R}^2 e^{-a\omega}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 e^{-2a\omega} + b^2}} d\omega + \frac{b^2 e^{2a\omega} d\omega}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + b^2 e^{2a\omega}}}$$

$$s = -\frac{\mathrm{R}}{a} \mathrm{L}\left(\mathrm{R}e^{-a\omega} + \sqrt{\mathrm{R}^2 e^{-2a\omega} + b^2}\right) + \frac{1}{a} \sqrt{\mathrm{R}^2 + b^2 e^{2a\omega}} + c'.$$

3° L'aire comprise entre deux rayons vecteurs infiniment voisins est celle d'un triangle de base

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\omega$$

dont la hauteur est la distance de l'origine à la tangente, distance dont le carré est égal à

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

le carré de cette aire est donc égal à

$$\frac{1}{4} (\Sigma x^2 \Sigma x'^2 - (\Sigma x' x)^2) d\omega^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2 + \frac{b^2}{a^2} e^{2a\omega}, \qquad xx' + yy' + zz' = \frac{b^2}{a} e^{2a\omega}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \mathrm{R}^2 + b^2 e^{2a\omega},$$

Si A est l'aire conique balayée par OM,

$$4\left(\frac{dA}{d\omega}\right)^2 = \left(R^2 + \frac{b^2}{a^2}e^{2a\omega}\right)\left(R^2 + b^2e^{2a\omega}\right) - \frac{b^4}{a^2}e^{4a\omega} =$$

$$= R^4 + R^2\frac{b^2}{a^2}(1 + a^2)e^{2a\omega}$$

$$dA = \frac{R}{2}\left(\frac{aR^2e^{-a\omega}}{\sqrt{a^2R^2e^{-2a\omega} + b^2(1 + a^2)}} + \frac{b^2(1 + a^2)e^{2a\omega}}{a\sqrt{a^2R^2 + b^2(1 + a^2)e^{2a\omega}}}\right)d\omega.$$

$$A = -\frac{R^2}{2a}L\left(aRe^{-a\omega} + \sqrt{a^2R^2e^{-2a\omega} + b^2(1 + a^2)}\right)$$
$$+ \frac{R}{2a^2}\sqrt{a^2R^2 + b^2(1 + a^2)e^{2a\omega}} + c'.$$

4° Une sphère tangente en o au plan xoy a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda z = 0.$$

La normale a ses cosinus directeurs proportionnels à x, y, et

$$z - \lambda = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z}.$$

Une surface, dont le plan tangent est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

coupe cette sphère orthogonalement si l'on a :

$$px + qy - \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z} = 0$$

équation entre les dérivées partielles p et q de z, dont les caractéristiques ont pour équations différentielles :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{z^2 + x^2 + y^2}$$

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'x.$$

Une surface intégrale a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Une courbe caractéristique rencontrera la courbe c si l'on a en même temps

$$x = R\cos\omega, \qquad y = cx = R\sin\omega, \qquad x^2 + y^2 + \frac{b^2}{a^2}e^{2a\omega} = c'x$$

ces 4 équations déterminent x, y, ω et une relation entre c et c'. En éliminant x et y, on peut exprimer c et c' en fonction de ω.

$$c = \operatorname{tg} \omega, \qquad c' = \frac{1}{R \cos \omega} \left(R^2 + \frac{b^2}{a^2} e^{2a\omega}\right).$$

En conservant le paramètre ω, on a les courbes caractéristiques

$$y = x \operatorname{tg} \omega, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x}{R \cos \omega} \left(R^2 + \frac{b^2}{a^2} e^{2a\omega}\right)$$

qui engendrent la surface intégrale

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \left(R^2 + \frac{b^2}{a^2} e^{2a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}\right).$$

257. Le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

coupe oz au point

$$Z = z - px - qy.$$

On a donc :

$$(z - px - qy)^2 = x^2 + y^2 + (px + qy)^2$$
$$2z(px + qy) = z^2 - x^2 - y^2$$

équation linéaire aux dérivées partielles, dont les courbes caractéristiques sont données par les équations :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'x.$$

Les surfaces intégrales ont pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

elles sont engendrées par des cercles tangents en o à oz.

258. La normale

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

coupe le plan xoy au point A de coordonnées $x + pz$, $y + qz$, o.

Le point P a pour coordonnées x, y, o. Les droites OA et OP forment avec ox des angles α et β tels que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y + qz}{x + pz}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x + pz}{y + qz}$$

on a l'équation :

$$z(px - qy) = y^2 - x^2.$$

2° Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{zdz}{y^2 - x^2} = \frac{ydy + xdx}{x^2 - y^2}.$$

Les équations des caractéristiques sont

$$xy = c, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'.$$

Les surfaces intégrales :

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(xy).$$

3° Les caractéristiques coupent la circonférence

$$x = y, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2a(a + x + y)$$

si l'on a :

$$x^2 = c, \qquad c' = 2a(a + 2x), \qquad (c' - 2a^2)^2 = 16a^2c.$$

Le lieu de ces caractéristiques est la surface S :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2)^2 = 16a^2xy$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a^2 = 4a\sqrt{xy}$$

le radical pouvant être pris avec le signe $\pm$.

4° Sur cette surface, on a :

$$x + pz = \frac{ay}{\sqrt{xy}}, \qquad y + qz = \frac{ax}{\sqrt{xy}}$$

$$d(x + pz) = a\frac{dy}{\sqrt{xy}} - ay\frac{xdy + ydx}{2xy\sqrt{xy}} = a\frac{xdy - ydx}{2x\sqrt{xy}}$$

$$d(x + qz) = a\frac{ydx - xdy}{2y\sqrt{xy}}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire :

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq}$$

ou :

$$(xdy - ydx)(ydq + xdp) = 0.$$

Le premier système est

$$y = cx.$$

Pour le second système, on a :

$$xdp + ydq = 0, \qquad dz = pdx + qdy = pdx + xdp + qdy + ydq$$

$$dz = d(px + qy), \qquad z - px - qy = c$$

$$z - \frac{1}{z}\left(a\frac{2xy}{\sqrt{xy}} - x^2 - y^2\right) = c$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a\sqrt{xy} = cz.$$

5° Les lignes de courbure du premier système peuvent se représenter par les équations :

$$y = c^2x, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 \pm 4acx$$

circonférences qui passent par les deux points fixes

$$x = y = 0, \qquad z = \pm a\sqrt{2}.$$

Les lignes de courbure du second système sont représentées par les équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a^2 = 2cz$$

$$4a^2xy = (cz - 2a^2)^2 = c^2z^2 + 4a^2(a^2 - cz)$$

mais on peut remplacer la seconde par

$$(x + y)^2 + z^2 = \frac{c^2z^2}{2a^2}$$

$$x + y = \pm z\sqrt{\frac{c^2}{2a^2} - 1}$$

et représenter ces lignes de courbure par les équations

$$x + y = \lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a^2 = \pm 2az\sqrt{2(1 + \lambda^2)}$$

double système de cercles passant par les points imaginaires

$$z = 0, \qquad x = -y = \pm a\sqrt{-1}.$$

Les plans passant par chacune des deux droites

$$z = 0, \qquad x + y = 0, \qquad \text{et} \qquad x = y = 0$$

coupent la surface suivant deux cercles, qui sont des lignes de courbure.

259. La normale

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

coupe le plan xoy au point $x + pz$, $y + qz$, o. On a l'équation :

$$(x + pz)^2 + (y + qz)^2 = z^2(1 + p^2 + q^2)$$

ou :

$$px + qy = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z}.$$

2° Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2zdz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(xdx + ydy + zdz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c'x$$

on a les surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

3° Sur cette surface, on a :

$$2(x + pz) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$2(y + qz) = f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

L'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire :

$$d(x + pz)\,dq = d(y + qz)\,dp$$

ou, en posant $y = tx$:

$$-tf''(t)dtdq = f''(t)dtdp$$

$$dt(ydq + xdp) = 0.$$

Le premier système

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xf(c)$$

est formé de circonférences. On peut vérifier qu'en chaque point d'une de ces circonférences le plan tangent forme, avec son plan, un angle constant, ou que la normale à la surface,

$$\frac{X - x}{2x - f(c) + cf'(c)} = \frac{Y - y}{2y - f'(c)} = \frac{Z - z}{2z}$$

passe par le même point

$$Z = 0, \qquad X = \frac{f(c) - cf'(c)}{2}, \qquad Y = \frac{f'(c)}{2}.$$

Pour le second système, on a :

$$xdp + ydq = 0$$
$$dz = pdx + qdy = d(px + qy)$$
$$z = px + qy + c = -\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{x}{2z} f\left(\frac{y}{x}\right) + c$$

ou :

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) + 2cz = 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

4° Le point P a pour coordonnées, si $\frac{y}{x} = t$:

$$X = x + pz = \frac{1}{2}(f(t) - tf'(t))$$
$$Y = y + qz = \frac{1}{2} f'(t)$$
$$Z = 0$$

ces équations définissent une courbe.

Cela résulte aussi de ce qu'on peut considérer la surface comme 'enveloppe de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - x(f(t) - tf'(t)) - yf'(t) = 0.$$

Pour tous les points de la caractéristique $y = tx$ le point P est le même, c'est le centre de la sphère.

Le point (X, Y) décrit la courbe

$$L\frac{y}{a} + x = 0,$$

si l'on a l'identité :

$$2L\frac{f'(t)}{2a} + f(t) - tf'(t) = 0.$$

En prenant les dérivées, on a :

$$f''(t)\left(\frac{2}{f'(t)} - t\right) = 0.$$

Si $f''(t) = 0$, on aurait $f(t) = bt + c$, X et Y seraient constants et, en effet, la surface serait une sphère. On a donc :

$$f'(t) = \frac{2}{t}, \qquad f(t) = 2 + 2L(at)$$

et la surface :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xL\frac{aey}{x}.$$

260. Les sphères tangentes au plan xoz, en un point de oz, ont leur centre dans le plan yoz, leur équation générale est :

$$x^2 + (y - a)^2 + (z - b)^2 = a^2$$

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ay - 2bz + b^2 = 0$$

1° on a

$$x + pz - bp = 0$$
$$y + qz - a - bq = 0$$

en éliminant a et b entre les trois équations, on a :

$$b = \frac{x + pz}{p}, \qquad a = y - x\frac{q}{p}$$

et l'équation aux dérivées partielles (E)

$$x^2(1 + p^2 + q^2) = (py - qx)^2$$

dont les sphères (1) représentent une intégrale complète.

2° Une surface intégrale, enveloppe de la sphère (1) où $a = f(b)$, est définie par les équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2yf(t) - 2zt + t^2 = 0 \\ yf'(t) + z - t = 0 \end{cases}$$

à chaques valeurs de t, f et f' correspond une caractéristique. Ces courbes sont des cercles passant par un point (o, o, t) de l'axe oz, la tangente en ce point étant parallèle à ox.

3° Le cercle $x = 0$, $y^2 + z^2 = 2y$ coupe la surface (2) en des points qui correspondent aux valeurs de t obtenues par l'élimination de x, y, z, ce qui donne :

$$y - yf(t) - zt + \frac{t^2}{2} = 0$$

$$y(1 - f + tf') = \frac{t^2}{2}$$

$$z(1 - f + tf') = t(1 - f) + \frac{t^2}{2}f'$$

$$\frac{t^2}{4} + \left[1 - f + \frac{t}{2}f'\right]^2 = 1 - f + tf'.$$

Le cercle est sur la surface (2), si cette équation est une identité

en t; c'est alors une équation différentielle, qui détermine la fonction $f(t)$. Elle peut se simplifier :

$$f'(t)^2 \frac{t^2}{4} - tf'(t)f(t) + f(t)^2 - f(t) + \frac{t^2}{4} = 0$$

$$\left[\frac{t}{2} f'(t) - f(t)\right]^2 = f(t) - \frac{t^2}{4}.$$

Si on pose

$$f(t) - \frac{t^2}{4} = u^2,$$

on a :

$$tuu' - u^2 = \pm u$$

$$tu' = u \pm 1, \qquad \text{ou} \qquad u = 0.$$

Soit

$$u = vt, \qquad v' = \pm \frac{1}{t^2}, \qquad v = \mp \frac{1}{t} + c$$

$$f(t) = \frac{t^2}{4} + (1 + ct)^2$$

car $v^2 = \left(\frac{1}{t} \pm c\right)^2$, mais le signe $\pm$ est inutile, puisque c est une constante arbitraire.

Le point d'intersection de la caractéristique et du cercle est alors : $x = 0$.

$$y = \frac{t^2}{2(1 - f + tf')} = \frac{2}{1 + 4c^2}$$

$$z = t - yf' = \frac{-4c}{1 + 4c^2}$$

ce point ne dépend pas de t, c'est un point fixe du cercle donné, qui n'est pas sur la surface.

La seule solution est

$$u = 0, \qquad f(t) = \frac{t^2}{4}.$$

On a la surface définie par les équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{2} y - 2tz + t^2 = 0$$

$$ty + 2z - 2t = 0$$

ou, en éliminant t :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2z^2}{2 - y}$$

ou :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,\frac{x^2 + y^2}{y}.$$

On peut arriver au même résultat en remarquant que le plan $x = 0$ coupe la surface (2) suivant la courbe enveloppe du cercle

$$y^2 + z^2 - 2yf(t) - 2zt + t^2 = 0$$

qui doit ainsi rester tangent au cercle donné $y^2 + z^2 = 2y$. Ces deux cercles sont tangents à oz ; il faut que la distance des centres soit égale à la somme des rayons

$$(f(t) - 1)^2 + t^2 = (f(t) + 1)^2, \qquad f(t) = \frac{t^2}{4}.$$

La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ est une intégrale, qui répond aussi à la question.

4° Sur la surface (2) on a :

$$xdx + ydy + zdz - f(t)dy - tdz - (yf'(t) + z - t)dt = 0.$$

La normale passe par le centre de la sphère, elle a pour cosinus directeurs

$$\frac{x}{f(t)}, \qquad \frac{y - f(t)}{f(t)}, \qquad \frac{z - t}{f(t)}.$$

Elle forme avec la droite

$$\frac{X - x}{y} = \frac{Y - y}{-x} = \frac{Z - z}{0},$$

qui est perpendiculaire au plan MOZ, un angle α dont le cosinus est :

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pour tout point de la section $y = cx$ cet angle est constant. Il en résulte que ces sections sont des lignes de courbure.

Les autres lignes de courbure sont les cercles caractéristiques (2) qui correspondent à $t = c$. Car les normales aux points d'un de ces cercles passent par le centre de la sphère $(o, f(t), t)$.

261. Soit $z = f(x, y)$ la surface donnée, et la sphère

$$(1) \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 - 2Zz = 0$$

qui dépend des deux paramètres x et y. La surface enveloppe s'ob-

tient en prenant les dérivées par rapport aux deux paramètres :

$$X - x + pZ = 0, \qquad Y - y + qZ = 0.$$

L'équation (1) peut alors se remplacer, en supprimant la solution évidente $Z = 0$, par :

$$Z(1 + p^2 + q^2) = 2z.$$

Ces trois équations, qui donnent X, Y, Z en fonction des paramètres x, y, déterminent la surface S. En un point de cette surface, la normale coïncide avec celle de la sphère, et passe par le centre x, y, z. Les cosinus directeurs de cette normale sont :

$$\frac{X - x}{z} = -p\frac{Z}{z} = -\frac{2p}{1 + p^2 + q^2}, \quad \frac{Y - y}{z} = -\frac{2q}{1 + p^2 + q^2},$$

$$\frac{Z - z}{z} = \frac{1 - p^2 - q^2}{1 + p^2 + q^2}.$$

2° On a l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + p^2 + q^2)(c - x) + 2pz = 0$$

les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{2p(c - x) + 2z} = \frac{dy}{2q(c - x)} = \frac{dz}{2(x - c - pz)} = \frac{dp}{1 - p^2 + q^2} = \frac{-dq}{2pq}$$

mais

$$1 - p^2 + q^2 = 2p\,\frac{z + p(c - x)}{x - c},$$

et l'on a

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x - c}.$$

Si, à l'équation aux dérivées partielles, on joint l'intégrale

$$p = a(x - c),$$

on aura

$$q^2 = -1 + 2az - a^2(x - c)^2;$$

on obtiendra une intégrale complète, en posant :

$$dz = a(x - c)dx + \sqrt{-1 + 2az - a^2(x - c)^2}\,dy$$

$$\frac{d\left(2az - a^2(x - c)^2\right)}{2\sqrt{2az - 1 - a^2(x - c)^2}} = ady$$

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{a}{2}(x - c)^2 + \frac{a}{2}(y - b)^2$$

intégrale complète, qui contient les constantes a et b.

En posant

$$a = \frac{1}{t}, \qquad \text{et} \qquad b = f(t)$$

on peut représenter l'intégrale générale, enveloppe de ces intégrales complètes, par les équations :

$$2tz = t^2 + (x - c)^2 + \big(y - f(t)\big)^2$$
$$z = t - \big(y - f(t)\big)f'(t).$$

3° Ces équations expriment les coordonnées x, y, z en fonction de deux paramètres, par exemple y et t. La première équation, en tenant compte de la seconde, donne :

$$tdz = (x - c)dx + (y - f)dy$$

et la seconde :

$$dz = dt - (y - f)f''dt - f'(dy - f'dt).$$

La normale a pour équations :

$$\frac{X - x}{x - c} = \frac{Y - y}{y - f(t)} = \frac{Z - z}{-t}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\begin{vmatrix} x - c, & dx, & dx \\ y - f(t), & dy - f'dt, & dy \\ -t, & -dt, & dz \end{vmatrix} = 0$$

où l'on remplacera dx et dz par leurs expressions en fonction de y et t

$$(x - c)dx = (f - y - tf')dy + t\big[1 - (y - f)f'' + f'^2\big]dt$$

on a l'équation :

$$\begin{vmatrix} t^2 - 2t(y-f)f' - (y-f)^2, & 0, & (f-y-tf')dy + t(1 - yf'' + ff'' + f'^2)dt \\ y - f, & -f'dt, & dy \\ -t, & f'dy - (2 - yf'' + ff'' + f'^2)dt, & -f'dy + (1 - yf'' + ff'' + f'^2)dt \end{vmatrix} = 0.$$

262. On nomme directions principales les tangentes aux lignes de courbure, qui correspondent aux sections normales dont le rayon de courbure est maximum ou minimum ; et tangentes principales les directions asymptotiques, pour lesquelles les sections normales ont un rayon de courbure infini. Si z est fonction des deux variables indépendantes x et y, les dérivées de z étant p et q, et les

dérivées secondes r, s, t, les directions asymptotiques, ou les tangentes principales sont déterminées par l'équation

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

Leurs projections ont des coefficients angulaires racines de l'équation

$$tm^2 + 2sm + r = 0.$$

ces deux directions sont symétriques par rapport à ox et oy, si

$$m + m' = 0, \qquad \text{ou} \qquad s = 0.$$

Les directions principales sont déterminées par l'équation :

$$\frac{(1 + p^2)dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{pqdx + (1 + q^2)dy}{sdx + tdy}.$$

Les coefficients angulaires de leurs projections sont donnés par l'équation

$$\left[pqt - s(1 + q^2)\right]m^2 + \left[(1 + p^2)t - (1 + q^2)r\right]m + (1 + p^2)s - pqr = 0$$

ces deux directions ont leurs bissectrices parallèles à ox et oy, si le coefficient de m est nul :

$$(1 + p^2)t = (1 + q^2)r.$$

Mais $s = 0$ montre que

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

on a alors :

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{t}{1 + q^2} = \frac{\varphi''}{1 + \varphi'^2}$$

comme ces fonctions dépendent l'une de x, l'autre de y, elles sont constantes, et

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{\varphi''}{1 + \varphi'^2} = a, \qquad \text{arc tg } f'(x) = ax + b$$

$$f'(x) = \text{tg } (ax + b), \qquad f(x) = -\frac{1}{a} \text{ L cos } (ax + b) + c'$$

et

$$\varphi(y) = -\frac{1}{a} \text{ L cos } (ay + c) + c''$$

$$az = -\text{ L cos } (ax + b) - \text{ L cos } (ay + c) + c'.$$

En choisissant l'origine des coordonnées, on peut ramener l'équation de cette surface à la forme

$$az = -\mathrm{L}\cos ax - \mathrm{L}\cos ay, \qquad \text{ou} \qquad \cos ax \cos ay = e^{-az}$$

on en déduit :

$$dz = \operatorname{tg} axdx + \operatorname{tg} aydy$$

$$p = \operatorname{tg} ax, \qquad q = \operatorname{tg} ay, \qquad r = \frac{a}{\cos^2 ax}, \qquad t = \frac{a}{\cos^2 ay}, \qquad s = 0.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 ax)dx + \operatorname{tg} ax \operatorname{tg} aydy}{a(1 + \operatorname{tg}^2 ax)dx} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 ay)dy + \operatorname{tg} ax \operatorname{tg} aydx}{a(1 + \operatorname{tg}^2 ay)dy}$$

$$\frac{dy^2}{\cos^2 ay} = \frac{dx^2}{\cos^2 ax}$$

$$\frac{dy}{\cos ay} = \pm \frac{dx}{\cos ax}$$

$$\frac{dy}{\cos^2 \frac{ay}{2}}\left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{ay}{2}} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\frac{ay}{2}}\right) = \pm \frac{dx}{\cos^2 \frac{ax}{2}}\left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\frac{ax}{2}} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\frac{ax}{2}}\right)$$

$$\mathrm{L}\,\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{ay}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{ay}{2}} = \mathrm{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ay}{2}\right) = c \pm \mathrm{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

Les deux systèmes de lignes de courbure ont pour projections :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ay}{2}\right) = c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ay}{2}\right) = c \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

ou

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ay}{2}\right) = c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{ax}{2}\right).$$

263. On a l'équation aux dérivées partielles

$$\cos V = \frac{z}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$1 + p^2 + q^2 - \frac{a^2}{z^2} = 0.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dz}{\frac{a^2}{z^2} - 1} = \frac{-z^3 dp}{pa^2} = \frac{-z^3 dq}{qa^2}.$$

Si on prend l'intégrale

$$Lp = Lq + c', \qquad p = qc,$$

en tenant compte de l'équation aux dérivées partielles, on peut poser

$$q = \frac{\cos\gamma}{z}\sqrt{a^2 - z^2}, \qquad p = q \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{z}\sqrt{a^2 - z^2}$$

où γ est constant. On en déduit une intégrale complète :

$$\frac{zdz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin\gamma dx + \cos\gamma dy$$

$$-\sqrt{a^2 - z^2} = x\sin\gamma + y\cos\gamma + c.$$

De cette intégrale complète on peut en déduire une autre en posant

$$c = -\alpha\sin\gamma - \beta\cos\gamma$$

$$-\sqrt{a^2 - z^2} = (x - \alpha)\sin\gamma + (y - \beta)\cos\gamma$$

et en cherchant l'enveloppe de ces surfaces, où γ est variable, c'est-à-dire en formant la dérivée par rapport à γ

$$(x - \alpha)\cos\gamma - (y - \beta)\sin\gamma = 0$$

l'élimination de γ donne :

$$a^2 - z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Une surface intégrale est l'enveloppe d'un système de ces sphères de rayon fixe a, dont le centre α, β décrit une courbe plane. La surface est engendrée par un grand cercle, de rayon a, dont le plan reste perpendiculaire à la courbe décrite par le centre. C'est une surface canal.

264. La droite qui joint les points $P(x, y, o)$ et $Q(o, o, z)$ a pour équations

$$\frac{X - x}{x} = \frac{Y - y}{y} = \frac{Z}{-z}.$$

Le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

est parallèle à cette droite, si

$$px + qy + z = 0$$

c'est une équation linéaire aux dérivées partielles, dont les caractéristiques sont déterminées par les équations :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z}$$

$$y = cx, \qquad xz = c'.$$

Les surfaces intégrales sont :

$$xz = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

2° En posant

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega,$$

on peut représenter cette surface par l'équation

$$\rho z = \frac{1}{\cos \omega} f(\operatorname{tg} \omega), \qquad \text{ou} \qquad \rho z = \varphi(\omega).$$

Pour qu'elle représente une surface de révolution autour de oz, il faut que z soit une fonction de ρ, ou que $\varphi(\omega)$ soit constant. On a la surface

$$z^2(x^2 + y^2) = a^2$$

engendrée par l'hyperbole équilatère $xz = a$ tournant autour de son asymptote oz.

3° La surface

$$xz = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

passe par la courbe

$$z = 1, \qquad y = x\mathrm{L}x,$$

si l'on a :

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = x = e^{\frac{y}{x}}.$$

On a la surface

$$xz = e^{\frac{y}{x}}.$$

4° Sur cette surface, on a :

$$dz = e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{xdy - ydx}{x^3} - \frac{dx}{x^2}\right)$$

$$d^2z = e^{\frac{y}{x}}\left(\frac{(xdy - ydx)^2}{x^5} - 4\,\frac{xdy - ydx}{x^4}\,dx + 2\,\frac{dx^2}{x^3}\right)$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques est :

$$(xdy - ydx)^2 - 4x(xdy - ydx)dx + 2x^2dx^2 = 0$$

$$xdy - ydx = (2 \pm \sqrt{2})xdx$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = (2 \pm \sqrt{2})\frac{dx}{x}$$

$$\frac{y}{x} = (2 \pm \sqrt{2})\mathrm{L}x + c.$$

Les projections sur le plan xoz ont pour équation

$$xz = x^{2 \pm \sqrt{2}} e^c$$

ou

$$z = c' x^{1 \pm \sqrt{2}}.$$

265. La projection du point $M'(x, y, o)$ sur le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

est donnée par les équations :

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z}{-1} = \frac{-z}{1 + p^2 + q^2}$$

on a l'équation :

$$a = \frac{z}{1 + p^2 + q^2}$$

$$1 + p^2 + q^2 - \frac{z}{a} = 0.$$

Equation aux dérivées partielles dont les caractéristiques ont pour équations différentielles :

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2\left(\frac{z}{a} - 1\right)} = \frac{adp}{p} = \frac{adq}{q}$$

qui auront pour intégrales :

$$2ap = x + A, \qquad 2aq = y + B,$$
$$z = a(1 + p^2 + q^2), \qquad q = Cp.$$

Pour $x = 0$ on a :

$$B = 2aq_0 - y_0,$$

$$A = 2ap_0 = 2a\sqrt{\frac{z_0}{a} - 1 - q_0^2}, \qquad C = \frac{q_0}{p_0} = \frac{2aq_0}{A}.$$

Les équations des caractéristiques s'obtiennent ainsi en fonction des 3 constantes y_0, z_0, q_0 :

Une surface passant par la courbe

$$x = 0, \qquad z = f(y)$$

s'obtiendra en posant

$$y_0 = t, \qquad z_0 = f(t). \qquad q_0 = f'(t).$$

On a ici :

$$z = \frac{y^2}{4a} + 2a$$

$$z_0 = \frac{t^2}{4a} + 2a, \qquad q_0 = \frac{t}{2a}$$

$$A = 2a, \qquad B = 0, \qquad C = \frac{t}{2a}$$

ce qui donne les caractéristiques :

$$2ap = x + 2a, \qquad 2aq = y, \qquad 2aq = pt, \qquad z = a(1 + p^2 + q^2)$$

et, en éliminant p et q :

$$y = \frac{t}{2a}(x + 2a), \qquad 4az = 4a^2 + y^2 + (x + 2a)^2.$$

La surface demandée est le paraboloïde

$$z = a + \frac{y^2 + (x + 2a)^2}{4a}$$

sur lequel les caractéristiques sont les sections par les plans

$$y = t\left(\frac{x}{2a} + 1\right)$$

On peut encore, en joignant à l'équation

$$z = a(1 + p^2 + q^2)$$

les relations

$$2ap = x + A, \qquad 2aq = y + B$$

(équations des caractéristiques), former l'intégrale complète

$$4az = 4a^2 + (x + A)^2 + (y + B)^2$$

qui donne, en effet,

$$x + A = 2ap, \qquad y + B = 2aq.$$

Pour $x = 0$, on a

$$y^2 + 2By + B^2 + A^2 + 4a^2 = 4az$$

qui est la parabole donnée si

$$B = 0, \qquad A = 2a.$$

CHAPITRE XI

—

DIFFÉRENTIELLES TOTALES

266. Si on considère z comme une fonction de x et y, on a :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = -\frac{z + \sin y}{\sin x + \sin y} z \operatorname{cotg} x, \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = -\frac{z + \sin x}{\sin y + \sin x} z \operatorname{cotg} y$$

on en déduit, en prenant la dérivée de $\frac{\delta z}{\delta x}$ par rapport à y :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta xy} = \frac{(z - \sin x) \sin y}{(\sin x + \sin y)^2} z \operatorname{cotg} y \operatorname{cotg} x - \frac{2z + \sin y}{\sin x + \sin y} \operatorname{cotg} x \frac{\delta z}{\delta y} =$$

$$= \frac{2z^2 + 2z(\sin x + \sin y)}{(\sin x + \sin y)^2} z \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y.$$

On peut calculer, de même, $\frac{\delta^2 z}{\delta yx}$; et comme les expresssions de $\frac{\delta z}{\delta x}$ et $\frac{\delta z}{\delta y}$ se permuttent en permuttant x et y, et que $\frac{\delta^2 z}{\delta xy}$ a une valeur symétrique entre x et y, on retrouvera le même résultat. Ce qui montre que la fonction z existe.

Si on pose $\sin x = X$, $\sin y = Y$, l'équation donnée devient :

$$(z + Y)zYdX + (X + z)XzdY + (Y + X)YXdz = 0$$

ou :

$$z^2(YdX + XdY) + X^2(zdY + Ydz) + Y^2(Xdz + zdX) = 0$$

$$z^2 d(XY) + X^2 d(zY) + Y^2 d(Xz) = 0$$

$$\frac{d(XY)}{X^2Y^2} + \frac{d(zY)}{z^2Y^2} + \frac{d(Xz)}{X^2z^2} = 0$$

$$\frac{1}{XY} + \frac{1}{zY} + \frac{1}{Xz} = c$$

$$z = \frac{X + Y}{cXY - 1} = \frac{\sin x + \sin y}{c \sin x \sin y - 1}.$$

267. En remplaçant zdy par $d(yz) - ydz$, on a la différentielle :

$$\begin{aligned}
&(2xz^2 + x^2 + yz)dx - (z^2 + x)d(yz) + 2z(yz - x^2)dz = \\
&\quad = yzd(x + z^2) - (x + z^2)d(yz) + (2xz^2 + x^2)dx - 2x^2zdz = \\
&\quad = (yz - x^2)d(x + z^2) - (x + z^2)d(yz) + 2x(x + z^2)dx = \\
&\quad = (yz - x^2)d(x + z^2) - (x + z^2)d(yz - x^2) = \\
&\quad = udv - vdu
\end{aligned}$$

où

$$u = yz - x^2, \qquad v = x + z^2.$$

Si $udv - vdu = 0$ on aura $u = cv$

$$yz - x^2 = c(x + z^2).$$

268. On pourrait vérifier si la condition d'intégrabilité, résultant de $\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial yx}$, est satisfaite. Mais cela résultera de la suite des calculs. L'équation peut s'écrire :

$$3(2y - 3z)(8yz - x^2)dx + 6x^3(2dy - 3dz) + 16x(3z^2dy - 2y^2dz) = 0$$

ou, en posant $2y - 3z = u$

$$3u(8yz - x^2)dx + 6x^3du + 16x(3z^2dy - 2y^2dz) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}
3z^2dy - 2y^2dz &= (2y - u)zdy - (3z + u)ydz = \\
&= yz(2dy - 3dz) - u(zdy + ydz) = yzdu - ud(yz).
\end{aligned}$$

L'équation donnée devient alors :

$$\begin{aligned}
3u(8yz - x^2)dx + 2x(3x^2 + 8yz)du - 16xud(yz) &= 0 \\
(3x^2 + 8yz)(3udx + 2xdu) - 12ux^2dx - 16uxd(yz) &= 0 \\
(3x^2 + 8yz)(3udx + 2xdu) - 2uxd(3x^2 + 8yz) &= 0 \\
3\frac{dx}{x} + 2\frac{du}{u} - 2\frac{d(3x^2 + 8yz)}{3x^2 + 8yz} &= 0 \\
3\mathrm{L}x + 2\mathrm{L}(2y - 3z) - 2\mathrm{L}(3x^2 + 8yz) &= 2\mathrm{L}c \\
\frac{2y - 3z}{3x^2 + 8yz}x^{\frac{3}{2}} &= c \\
z = \frac{2y - 3c\sqrt{x}}{3 + 8cyx^{-\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

269. Si z est considéré comme fonction de x et y, on aura :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{yz + a^2}{x(x+y)}, \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{xz + a^2}{y(x+y)}$$

équations qui ne changent pas si on permutte x et y. On déduit de la première :

$$\frac{\delta^2 z}{\delta xy} = \frac{zx - a^2}{x(x+y)^2} + \frac{y}{x(x+y)}\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{2z}{(x+y)^2}$$

cette expression étant symétrique en x et y, on retrouve le même résultat en formant $\frac{\delta^2 z}{\delta yx}$, et la condition d'intégrabilité est vérifiée.

2° L'équation donnée peut s'écrire

$$a^2 \frac{d(xy)}{xy} - xyz\, d\frac{x+y}{xy} - (x+y)dz = 0$$

$$a^2 \frac{d(xy)}{xy} - xy\left(zd\frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{xy}dz\right) = 0$$

et, en divisant par xy :

$$a^2 \frac{d(xy)}{x^2y^2} - d\left(z\frac{x+y}{xy}\right) = 0$$

dont l'intégrale est :

$$\frac{a^2}{xy} + z\frac{x+y}{xy} = c$$

$$z = \frac{cxy - a^2}{x+y}.$$

3° L'équation différentielle a été intégrée, en la multipliant par $\frac{-1}{xy}$, on peut donc prendre $\lambda = \frac{1}{xy}$. Son premier membre peut s'écrire

$$-xyd\left(\frac{a^2 + z(x+y)}{xy}\right).$$

La forme générale du facteur λ est

$$\lambda = \frac{1}{xy} f\left(\frac{a^2}{xy} + z\frac{x+y}{xy}\right).$$

270. Si z est une fonction de x et y, on doit avoir :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = Az^2 + 2Bz + C, \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = A_1 z^2 + 2B_1 z + C_1$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta xy} = \frac{\delta A}{\delta y} z^2 + 2\frac{\delta B}{\delta y} z + \frac{\delta C}{\delta y} + 2(Az + B)\frac{\delta z}{\delta y} =$$

$$= 2AA_1 z^3 + \left(\frac{\delta A}{\delta y} + 4AB_1 + 2BA_1\right) z^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\delta B}{\delta y} + AC_1 + 2BB_1\right) z + \frac{\delta C}{\delta y} + 2BC_1$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta yx} = \frac{\delta A_1}{\delta x} z^2 + 2\frac{\delta B_1}{\delta x} z + \frac{\delta C_1}{\delta x} + 2(A_1 z + B_1)(Az^2 + 2Bz + C) =$$

$$= 2A_1 A z^3 + \left(\frac{\delta A_1}{\delta x} + 4A_1 B + 2B_1 A\right) z^2 + 2\left(\frac{\delta B_1}{\delta x} + A_1 C + 2BB_1\right) z +$$

$$+ \frac{\delta C_1}{\delta x} + 2B_1 C.$$

Pour que la fonction z existe, il faut que $\frac{\delta^2 z}{\delta xy} = \frac{\delta^2 z}{\delta yx}$

$$\left(\frac{\delta A}{\delta y} - \frac{\delta A_1}{\delta x} + 2AB_1 - 2BA_1\right) z^2 + 2\left(\frac{\delta B}{\delta y} - \frac{\delta B_1}{\delta x} + AC_1 - A_1 C\right) z +$$

$$+ \frac{\delta C}{\delta y} - \frac{\delta C_1}{\delta x} + 2(BC_1 - B_1 C) = 0.$$

Si cette équation n'est pas une identité elle détermine z, et il faudrait que cette fonction vérifie l'équation donnée, mais il n'y aurait alors qu'une fonction z déterminée. Pour que l'équation soit complètement intégrable, c'est-à-dire pour que la solutiou contienne une constante arbitraire, il faut que la relation obtenue soit une identité en z, ce qui donne les trois conditions :

$$\frac{\delta A}{\delta y} - \frac{\delta A_1}{\delta x} = 2(BA_1 - AB_1)$$

$$\frac{\delta B}{\delta y} - \frac{\delta B_1}{\delta x} = CA_1 - AC_1$$

$$\frac{\delta C}{\delta y} - \frac{\delta C_1}{\delta x} = 2(CB_1 - BC_1).$$

2° Si ces conditions sont satisfaites, en considérant x ou y comme constant, z serait donné par une équation de Ricati. Soit $z = z_1$ une solution supposée connue, fonction de x et y, on est conduit à poser

$$z = z_1 + \frac{1}{u}.$$

Comme z_1 vérifie l'équation donnée, on en déduit :

$$dz - dz_1 = [A(z^2 - z_1^2) + 2B(z - z_1)]dx + [A_1(z^2 - z_1^2) + 2B_1(z - z_1)]dy$$

$$d\frac{1}{u} = \frac{1}{u}\left[A\left(2z_1 + \frac{1}{u}\right) + 2B\right]dx + \frac{1}{u}\left[A_1\left(2z_1 + \frac{1}{u}\right) + 2B_1\right]dy$$

$$du = -[2Az_1u + A + 2Bu]dx - [2A_1z_1u + A_1 + 2B_1u]dy$$

$$\frac{\delta u}{\delta x} = -2(Az_1 + B)u - A, \qquad \frac{\delta u}{\delta y} = -2(A_1z_1 + B_1)u - B_1.$$

Equations linéaires que l'on intègre par quadratures. On peut d'abord considérer l'équation homogène entre u et ses dérivées partielles

$$\frac{du}{u} = -2(Az_1 + B)dx - 2(A_1z_1 + B_1)dy$$

pour laquelle la condition d'intégrabilité est aussi satisfaite, ce qui est facile à vérifier. On intègre d'abord en supposant y constant, la constante d'intégration, fonction de y, se détermine par une seconde intégration. Soit $u = cu_1$ l'intégrale ainsi obtenue. On pose $u = u_1v$, et on obtient, pour déterminer v :

$$u_1dv = -Adx - A_1dy$$

équation qui détermine v par quadratures.

Si on connaît deux solutions distinctes, z_1, z_2, de l'équation donnée, on connaîtra une solution $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1}$ de l'équation en u, et, en posant $u = u_1 + v$, on est conduit à déterminer v par quadratures. On obtient une solution de la forme

$$u = u_1 + \lambda v, \qquad z = z_1 + \frac{1}{u_1 + \lambda v_1}.$$

Si on donne à la constante λ quatre valeurs déterminées, on peut vérifier que le rapport anharmonique des 4 solutions z est constant. Donc, si on connaît trois solutions z_1, z_2, z_3 indépendantes, on aura la solution générale z_1 en posant :

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} = c.$$

3° La tangente à la courbe

$$x^2 - 2z^2 = a, \qquad 5y^3 - 5x^2z^3 + mx^3z + 4z^5 = b$$

est déterminée par les relations :

$$xdx = 2zdz$$
$$15y^2dy + (3mx^2z - 10xz^3)dx + (mx^3 + 20z^4 - 15x^2z^2)dz = 0$$
$$15y^2dy + (6mxz^2 + mx^3 - 15x^2z^2)dz = 0$$
$$\frac{dx}{30zy^2} = \frac{dy}{x^2(15xz^2 - 6mz^2 - mx^2)} = \frac{dz}{15xy^2}.$$

S'il existe une surface $z = f(x, y)$, normale à cette courbe en chacun des points de la surface, on devra avoir :

$$15xy^2dz + x^2(15xz^2 - 6mz^2 - mx^2)dy + 30zy^2dx = 0$$
$$dz = -\frac{2z}{x}dx + \left(\frac{2m - 5x}{5y^2}xz^2 + \frac{mx^3}{15y^2}\right)dy$$

c'est une équation aux différentielles totales de la forme donnée, où :

$$A = C = B_1 = 0, \quad B = \frac{-1}{x}, \quad A_1 = \frac{2mx - 5x^2}{5y^2}, \quad C_1 = \frac{mx^3}{15y^2}.$$

Les trois conditions trouvées se réduisent à :

$$\frac{\delta A_1}{\delta x} = \frac{2}{x}A_1, \qquad \frac{\delta C_1}{\delta x} = \frac{-2}{x}C_1$$

elles sont vérifiées si $m = 0$. On a alors :

$$dz = -\frac{2z}{x}dx - \frac{x^2}{y^2}z^2dy$$
$$\frac{dz}{z} + 2\frac{dx}{x} + zx^2\frac{dy}{y^2} = 0$$
$$\frac{d(zx^2)}{x^4z^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$$
$$\frac{1}{zx^2} + \frac{1}{y} = c, \qquad z = \frac{y}{x^2(cy - 1)}.$$

271. Cette équation peut s'écrire :

$$(y - z)(3yz - x^2)dx + 2x^3(dy - dz) + 2x(z^2dy - y^2dz) = 0$$

mais

$$z^2dy - y^2dz = (z - y)d(yz) + yz(dy - dz)$$

on a alors :

$$2x(x^2 + yz)d(y - z) + (y - z)(3yzdx - x^2dx - 2xd(yz)) = 0$$
$$2x(x^2 + yz)d(y - z) - (y - z)2xd(x^2 + yz) + 3(y - z)(yz + x^2)dx = 0$$
$$2\frac{d(y - z)}{y - z} - 2\frac{d(x^2 + yz)}{x^2 + yz} + 3\frac{dx}{x} = 0$$

ce qui montre que l'équation est intégrable, et donne

$$2L(y-z) - 2L(x^2+yz) + 3Lx = Lc$$
$$(y-z)^2x^3 = c(x^2+yz)^2$$

ou, si $c' = \sqrt{c}$,

$$z = \frac{yx\sqrt{x} - c'x^2}{x\sqrt{x} + c'y}.$$

Une méthode plus directe consiste à partir des relations

$$\frac{\delta z}{\delta x} = (y-z)\frac{3yz - x^2}{2x(x^2+y^2)}, \qquad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}.$$

Si on considère d'abord x comme constant, la seconde équation donne

$$\frac{dz}{x^2+z^2} = \frac{dy}{x^2+y^2}$$

$$\text{arc tg}\,\frac{z}{x} - \text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \text{arc tg}\,\frac{z-y}{x\left(1+\frac{yz}{x^2}\right)} = c$$

ou

$$\frac{z-y}{x^2+yz} = u,$$

cette constante u étant une fonction de x,

$$z = \frac{y+x^2u}{1-yu}.$$

La première équation donne alors :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{2xu(1-yu) + (x^2+y^2)u'}{(1-yu)^2} = (y-z)\frac{3yz-x^2}{2x(x^2+y^2)} =$$
$$= u\frac{x^2 - 3y^2 - 4uyx^2}{2x(1-yu)^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que cette équation puisse être vérifiée quelque soit y ; et, en effet, elle se réduit à

$$(x^2+y^2)(3u + 2xu') = 0$$
$$\frac{u'}{u} + \frac{3}{2x} = 0, \qquad u = cx^{-\frac{3}{2}}.$$

272. Si la différentielle donnée est la différentielle d'une fonction $\varphi(x, y)$, on aura

$$\frac{\delta\varphi}{\delta x} = x\frac{\delta z}{\delta x} + y, \qquad \frac{\delta\varphi}{y} = x\frac{\delta z}{\delta y} + x - 2xy + 2yf'(z-x).$$

Pour que φ existe, il faut que l'on ait

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta xy} = \frac{\delta^2\varphi}{\delta yx}$$

ou :

$$x\frac{\delta^2 z}{\delta xy} + 1 = x\frac{\delta^2 z}{\delta yx} + \frac{\delta z}{\delta y} + 1 - 2y + 2y\left(\frac{\delta z}{\delta x} - 1\right)f''$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} + 2y\frac{\delta z}{dx}f'' = 2y(1 + f'')$$

Pour intégrer cette équation aux dérivées partielles, où z est la fonction inconnue, on forme les équations des caractéristiques :

$$\frac{dx}{2yf''} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2y(1 + f'')} = \frac{d(z - x)}{2y}$$

$$y^2 + x - z = c, \qquad x - f'(z - x) = c'.$$

La solution générale est

$$x - f'(z - x) = \varphi(y^2 + x - z)$$

où $f(z - x)$ est une fonction donnée et $\varphi(y^2 + x - z)$ une fonction arbitraire.

2° Les caractéristiques coupent la courbe $x = 0$, $z = y^2$, si l'on a $c = 0$, $c' = -f'(z)$ restant arbitraire, on a donc l'intégrale, lieu de ces caractéristiques :

$$z = x + y^2$$

qui est indépendante de f. On a alors la différentielle

$$(x + y)dx + (x + 2yf'(y^2))dy$$

qui est la différentielle de la fonction

$$\frac{x^2}{2} + xy + f(y^2).$$

273. $zdx + z^2dy$ est une différentielle exacte, si l'on a :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta(z^2)}{\delta x} = 2z\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} - 2z\frac{\delta z}{\delta x} = 0$$

est une équation aux dérivées partielles, les caractéristiques sont données par les équations

$$\frac{dx}{-2z} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}$$

$$z = c, \qquad x + 2cy = c'.$$

La solution générale serait

$$x + 2zy = f(z).$$

Les caractéristiques passent par la courbe $y = 0$, $z = \sqrt{x}$, si l'on a :

$$x = c' = z^2 = c^2, \qquad c^2 = c'.$$

Le lieu de ces caractéristiques est :

$$z^2 = 2zy + x, \qquad z = y + \sqrt{y^2 + x}$$

qui, pour $y = 0$, se réduit à $z = \sqrt{x}$.

2° Soit :

$$\begin{aligned} du &= (y + \sqrt{y^2 + x})\,dx + (2y^2 + x + 2y\sqrt{y^2 + x})\,dy \\ &= ydx + xdy + 2y^2dy + \sqrt{y^2 + x}(dx + 2ydy) \\ u &= xy + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{3}(y^2 + x)\sqrt{y^2 + x}. \end{aligned}$$

274. On peut considérer x_0, y_0, z_0, et z comme fonctions des deux variables indépendantes x et y. Posons :

$$dz = pdx + qdy, \qquad dx_0 = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy, \qquad dy_0 = \mathrm{A}'dx + \mathrm{B}'dy$$
$$dz_0 = \mathrm{A}''dx + \mathrm{B}''dy.$$

Les identités

$$dx_0^2 + dy_0 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0$$

donnent

$$(1)\begin{cases} \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2 = 1 + p^2 \\ \mathrm{B}^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{B}''^2 = 1 + q^2 \\ \mathrm{AB} + \mathrm{A}'\mathrm{B}' + \mathrm{A}''\mathrm{B}'' = pq \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \mathrm{A} = -p\mathrm{A}'' \\ \mathrm{B} + \mathrm{A}' = -p\mathrm{B}'' - q\mathrm{A}'' \\ \mathrm{B}' = -q\mathrm{B}'' \end{cases}$$

Les plans tangents aux deux surfaces, aux points correspondants, ont pour équations :

$$\mathrm{Z} - z = p(\mathrm{X} - x) + q(\mathrm{Y} - y)$$
$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} - x, & \mathrm{A}, & \mathrm{B} \\ \mathrm{Y} - y, & \mathrm{A}', & \mathrm{B}' \\ \mathrm{Z} - z, & \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les normales, et les plans tangents, sont parallèles, si l'on a :

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'' - \mathrm{B}'\mathrm{A}''}{p} = \frac{\mathrm{A}''\mathrm{B} - \mathrm{B}''\mathrm{A}}{q} = \frac{\mathrm{AB}' - \mathrm{BA}'}{-1}.$$

En représentant par u une fonction auxiliaire, les équations (2) donnent

$$A = -pA'', \quad B = -pB'' + u, \quad A' = -qA'' - u, \quad B' = -qB''.$$

En éliminant A, B, A′, B′, les équations (1) et (3) deviennent :

$$(4) \quad \begin{cases} A''^2(1 + p^2 + q^2) + 2A''qu + u^2 = 1 + p^2 \\ B''^2(1 + p^2 + q^2) - 2B''pu + u^2 = 1 + q^2 \\ A''B''(1 + p^2 + q^2) + (qB'' - pA'')u = pq \end{cases}$$

$$-\frac{uB''}{p} = \frac{uA''}{q} = u(pB'' - qA'' - u).$$

Si $u = 0$, en éliminant A″ et B″, les équations (4) donnent $1 + p^2 + q^2 = 0$, ces équations (4) sont alors incompatibles. On a donc :

$$-\frac{B''}{p} = \frac{A''}{q} = pB'' - qA'' - u$$

équations qu'on peut résoudre par rapport à A″ et B″ :

$$(5) \quad \begin{cases} A''(1 + p^2 + q^2) = -uq \\ B''(1 + p^2 + q^2) = up \end{cases}$$

En éliminant A″ et B″, les trois équations (4) se réduisent à une seule,

$$u^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

On a ainsi :

$$A = \frac{pq}{u}, \quad B = \frac{1 + q^2}{u}, \quad A' = -\frac{1 + p^2}{u}, \quad B' = -\frac{pq}{u}$$

$$A'' = -\frac{q}{u}, \quad B'' = \frac{p}{u}, \quad u = \pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Il faut encore exprimer que x_0, y_0, z_0 sont des différentielles exactes, ou :

$$\frac{\delta \frac{pq}{u}}{\delta y} = \frac{\delta \frac{1 + q^2}{u}}{\delta x}, \quad \frac{\delta \frac{1 + p^2}{u}}{\delta y} = \frac{\delta \frac{pq}{u}}{\delta x}, \quad \frac{\delta \frac{-q}{u}}{\delta y} = \frac{\delta \frac{p}{u}}{\delta x}.$$

En représentant par r, s, t les dérivées secondes

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta xy}, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2},$$

ces trois équations donnent :

$$\frac{pt+qs}{u} - pq\frac{ps+qt}{u^3} = \frac{2qs}{u} - (1+q^2)\frac{pr+qs}{u^3}$$

$$\frac{2ps}{u} - (1+p^2)\frac{ps+qt}{u^3} = \frac{qr+ps}{u} - pq\frac{pr+qs}{u^3}$$

$$-\frac{t}{u} + q\frac{ps+qt}{u^3} = \frac{r}{u} - p\frac{pr+qs}{u^3}.$$

Si on multiplie par u^3, en divisant les termes de la première équation par p, ceux de la seconde par q, ces trois équations se réduisent à une seule :

$$t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2) = 0 \tag{6}$$

cette équation exprime que la somme des rayons de courbure principaux est nulle. En tout point de la surface S les rayons de courbure sont égaux et de sens contraires.

2° Cette propriété est indépendante des axes de coordonnées.

Soit $z = f(\rho)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ l'équation de la surface S de révolution, autour de oz, elle doit vérifier l'équation (6). On a :

$$dz = f'(\rho)\frac{x\,dx + y\,dy}{\rho}$$

$$p = f'(\rho)\frac{x}{\rho}, \qquad q = f'(\rho)\frac{y}{\rho}$$

$$r = f''(\rho)\frac{x^2}{\rho^2} + f'(\rho)\frac{y^2}{\rho^3}, \qquad s = f''(\rho)\frac{xy}{\rho^2} - f'(\rho)\frac{xy}{\rho^3}$$

$$t = f''(\rho)\frac{y^2}{\rho^2} + f'(\rho)\frac{x^2}{\rho^3}$$

L'équation (6) devient :

$$f''(\rho) + f'(\rho)\frac{1+f'^2(\rho)}{\rho} = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{df'}{f'(1+f'^2)} = \left(\frac{f'}{1+f'^2} - \frac{1}{f'}\right)df'$$

$$2\mathrm{L}\rho = \mathrm{L}(1+f'^2) - 2\mathrm{L}f' + 2\mathrm{L}c$$

$$\rho^2 = c^2\frac{1+f'^2}{f'^2}, \qquad f'^2 = \frac{c^2}{\rho^2 - c^2}$$

$$df = \frac{c\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

$$f = c\mathrm{L}(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}) + c'.$$

La méridienne de la surface a pour équation

$$z = c\mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - c^2}) + c'$$

ou

$$x + \sqrt{x^2 - c^2} = ke^{\frac{z}{c}}, \qquad k = e^{-\frac{c'}{c}}$$

mais on en déduit :

$$x - \sqrt{x^2 - c^2} = \frac{c^2}{k} e^{-\frac{z}{c}}$$

$$x = \frac{k}{2} e^{\frac{z}{c}} + \frac{c^2}{2k} e^{-\frac{z}{c}}.$$

En déplaçant l'origine sur oz, on peut multiplier k par une constante arbitraire, ou choisir la valeur de k. Si $k = c$, on a

$$x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}\right)$$

cette courbe est une chaînette, qui tourne autour de sa base. Ce résultat pourrait se déduire de la propriété de la chaînette d'avoir son rayon de courbure égal, et de sens contraire, à la normale limitée à la base. On a alors :

$$f(\rho) = c\mathrm{L}\,\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, \qquad f'(\rho) = \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

$$p = \frac{cx}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \qquad q = \frac{cy}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \qquad u = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

$$\mathrm{A} = \frac{c^2xy}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \qquad \mathrm{A}' = \frac{c^2y^2 - \rho^4}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \qquad \mathrm{A}'' = -\frac{cy}{2}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\rho^4 - c^2x^2}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \qquad \mathrm{B}' = -\mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}'' = \frac{cx}{\rho^2}.$$

Si on pose

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

on aura :

$$dx_0 = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy = \frac{\rho^4 dy - c^2x(xdy - ydx)}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}} =$$

$$= \frac{\rho^4(\sin\omega d\rho + \rho\cos\omega d\omega) - c^2x^3 d\,\mathrm{tg}\,\omega}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \sin\omega\,\frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} + \sqrt{\rho^2 - c^2}\cos\omega d\omega$$

$$x_0 = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,\sin\omega$$

on pourrait ajouter une constante, mais cela est inutile en choisissant l'origine

$$dy_0 = A'dx + B'dy = \frac{-\rho^4 dx + c^2 y(ydx - xdy)}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - c^2}} =$$

$$= -\cos\omega \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} + \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\omega d\omega$$

$$y_0 = -\cos\omega\sqrt{\rho^2 - c^2}$$

$$dz_0 = c\frac{xdy - ydx}{\rho^2} = cd\omega, \qquad z_0 = c\omega.$$

La surface S_0, représentée par l'équation $x_0 = -y_0 \operatorname{tg}\frac{z_0}{c}$, est un hélicoïde engendré par la droite

$$z_0 = c', \qquad x_0 = -y_0 \operatorname{tg}\frac{c'}{c}$$

qui reste perpendiculaire à oz, et dont chaque point décrit une hélice.

3° Dans le cas général, les deux surfaces S_0, S ayant leurs plans tangents parallèles, on a :

$$dz_0 = pdx_0 + qdy_0$$

$$d^2z_0 - pd^2x_0 - qd^2y_0 = dx_0(rdx + sdy) + dy_0(sdx + tdy).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S_0 est :

$$(Adx + Bdy)(rdx + sdy) + (A'dx + B'dy)(sdx + tdy) = 0$$

$$[pqdx + (1 + q^2)dy](rdx + sdy) = [(1 + p^2)dx + pqdy][sdx + tdy]$$

c'est l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface S.

Réciproquement, l'équation des lignes de courbure de la surface S_0 peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} p & dp & dx_0 \\ q & dq & dy_0 \\ -1 & 0 & dz_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} p, & rdx + sdy, & pqdx + (1 + q^2)dy \\ q, & sdx + tdy, & -(1 + p^2)dx - pqdy \\ -1, & 0, & -qdx + pdy \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant à la deuxième colonne les éléments de la première, multipliés par $pdy - qdx$, on a

$$\begin{vmatrix} p, & rdx + sdy, & (1 + p^2 + q^2)dy \\ q, & sdx + tdy, & -(1 + p^2 + q^2)dx \\ -1, & 0, & 0, \end{vmatrix} = 0.$$

ou

$$rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0.$$

Équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface S.

Pour la surface particulière du numéro (2)

$$(S) \quad z = cL\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, \qquad x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega$$

$$(S_0) \quad x_0 = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\omega, \qquad y_0 = -\sqrt{\rho^2 - c^2}\cos\omega, \qquad z_0 = c\omega.$$

Les lignes de courbure de la suface S sont les méridiens $\omega = c'$ et les parallèles $\rho = c''$, auxquels correspondent, sur S_0, les génératrices rectilignes, et les hélices.

Sur la surface S, on a :

$$dz = \frac{cd\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{c(xdx + ydy)}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Et, si x et y sont les variables indépendantes :

$$d^2z = \frac{c}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}\left(dx^2 + dy^2 + (xdx + ydy)\frac{c^2 - 2\rho^2}{\rho(\rho^2 - c^2)}d\rho\right)$$

$$= \frac{c}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}\left(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + \frac{c^2 - 2\rho^2}{\rho^2 - c^2}d\rho^2\right) =$$

$$= \frac{c}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}\left(\rho^2 d\omega^2 - \frac{\rho^2 d\rho^2}{\rho^2 - c^2}\right).$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$d\omega^2 = \frac{d\rho^2}{\rho^2 - c^2}, \qquad d\omega = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

$$c' \pm \omega = L(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}).$$

Cette équation représente les lignes asymptotiques de la surface S, et les lignes de courbure de S_0.

CHAPITRE XII

—

FONCTIONS ELLIPTIQUES

275. En cherchant les racines entières du polynome X, on trouve

$$X = (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5).$$

On ramène les racines à être deux à deux égales et de signes contraires, et en même temps deux racines aux valeurs ± 1, en posant :

$$x = \frac{y + 7}{2}, \qquad X = \frac{1}{16}(y^2 - 1)(y^2 - 9)$$

$$u = \int \frac{dx}{(x - 3)^3 \sqrt{(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)}} =$$

$$= \int \frac{16dy}{3(1 + y)^3 \sqrt{(1 - y^2)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)}}$$

Posons

$$(1 - y^2)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right) = Y.$$

En formant la dérivée de $\frac{\sqrt{Y}}{(1 + y)^n}$, on a :

$$\frac{\sqrt{Y}}{(1 + y)^n} = \int \frac{2y^3 - 10y - n(1 - y)(9 - y^2)}{9(1 + y)^n \sqrt{Y}} dy =$$

$$= \int \left(4 \frac{2 - 4n}{(1 + y)^n} + 4 \frac{n - 1}{(1 + y)^{n-1}} + 2 \frac{2n - 3}{(1 + y)^{n-2}} + \frac{2 - n}{(1 + y)^{n-3}}\right) \frac{dy}{9\sqrt{Y}}.$$

Pour $n = 3, 2, 1$, on a :

$$\int \left(\frac{-40}{(1 + y)^3} + \frac{8}{(1 + y)^2} + \frac{6}{1 + y} - 1\right) \frac{dy}{9\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{(1 + y)^3}$$

$$\int \left(\frac{-24}{(1 + y)^2} + \frac{4}{1 + y} + 2\right) \frac{dy}{9\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{(1 + y)^2}$$

$$\int \left(\frac{-8}{1 + y} - 1 + y^2\right) \frac{dy}{9\sqrt{Y}} = \frac{\sqrt{Y}}{1 + y}$$

En ajoutant ces équations multipliées par 12, 4, 11, pour éliminer

$$\int \frac{dy}{(1+y)\sqrt{Y}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{Y}},$$

on a :

$$\int \left(-\frac{480}{(1+y)^3} + 11y^2 - 15\right)\frac{dy}{9\sqrt{Y}} = \frac{27+26y+11y^2)}{(1+y)^3}\sqrt{Y}$$

$$u = \frac{16}{3}\int \frac{dy}{(1+y)^3\sqrt{Y}} = \frac{1}{10}\left[-\frac{27+26y+11y^2}{(1+y)^3}\sqrt{Y} + \int \frac{11y^2-15}{9\sqrt{Y}}dy\right].$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} \quad \text{et} \quad \int \frac{y^2dy}{\sqrt{Y}}$$

sont les intégrales réduites de première et de seconde espèce de Legendre.

276. L'hélicoïde a pour équation

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a},$$

il est engendré par la droite

$$z = c, \qquad y = x \operatorname{tg} \frac{c}{a}$$

qui rencontrera l'hélice

$$x = R \cos \omega, \qquad y = R \sin \omega, \qquad z = a\omega$$

au point $\omega = \frac{c}{a}$.

Un point de cette surface peut être représenté par les équations

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega, \qquad z = a\omega$$

où ρ et ω sont deux paramètres variables. Supposons ρ et ω fonctions d'un paramètre t. Le point (x, y, z) décrira une courbe de la surface. Le plan osculateur à cette courbe a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X-x, & \rho' \cos\omega - \rho\omega' \sin\omega, & \rho'' \cos\omega - 2\rho'\omega' \sin\omega - \rho\omega'^2 \cos\omega - \rho\omega'' \sin\omega \\ Y-y, & \rho' \sin\omega + \rho\omega' \cos\omega, & \rho'' \sin\omega + 2\rho'\omega' \cos\omega - \rho\omega'^2 \sin\omega + \rho\omega'' \cos\omega \\ Z-z, & a\omega', & a\omega'' \end{vmatrix} = 0$$

Pour que cette courbe soit une ligne géodésique, il faut que ce

plan osculateur passe par la normale à la surface, dont les équations sont :

$$\frac{X-x}{\operatorname{tg}\frac{z}{a}} = \frac{Y-y}{-1} = \frac{Z-z}{\dfrac{x}{a\cos^2\frac{z}{a}}}$$

ou

$$\frac{X-x}{a\sin\omega} = \frac{Y-y}{-a\cos\omega} = \frac{Z-z}{\rho}$$

ce qui donne l'équation :

$$\begin{vmatrix} a\sin\omega, & \rho'\cos\omega-\rho\omega'\sin\omega, & \rho''\cos\omega-2\rho'\omega'\sin\omega-\rho\omega'^2\cos\omega-\rho\omega''\sin\omega \\ -a\cos\omega, & \rho'\sin\omega+\rho\omega'\cos\omega, & \rho''\sin\omega+2\rho'\omega'\cos\omega-\rho\omega'^2\sin\omega+\rho\omega''\cos\omega \\ \rho, & a\omega', & a\omega'' \end{vmatrix} = 0$$

$$(a^2+\rho^2)\rho'\omega'' + (a^2+\rho^2)\rho\omega'^3 + [2\rho\rho'^2 - (\rho^2+a^2)\rho'']\omega' = 0.$$

Si on considère ρ comme variable indépendante, et ω comme fonction de ρ, on a

$$\rho' = 1, \qquad \rho'' = 0$$

$$(a^2+\rho^2)\frac{d^2\omega}{d\rho^2} + (a^2+\rho^2)\rho\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^3 + 2\rho\frac{d\omega}{d\rho} = 0.$$

En considérant $\frac{1}{\omega'^2}$ comme fonction inconnue, on aura une équation linéaire. Posons

$$\frac{1}{\omega'^2} = u, \qquad \frac{2\omega''}{\omega'^3} = -u' = -\frac{du}{d\rho}$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{4\rho}{a^2+\rho^2}u + 2\rho.$$

En posant $u = v(a^2+\rho^2)^2$, on a :

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{2\rho}{(a^2+\rho^2)^2}, \qquad v = -\frac{1}{a^2+\rho^2} + c$$

$$u = c(a^2+\rho^2)^2 - (a^2+\rho^2)$$

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{u}}, \qquad d\omega = \frac{d\rho}{\sqrt{(a^2+\rho^2)\,(c(a^2+\rho^2)-1)}}.$$

Posons

$$\frac{\rho^2+a^2}{a^2} = \frac{1}{t^2}, \qquad \frac{d\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}} = \frac{-dt}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$d\omega = \frac{-dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(ca^2-t^2)}}.$$

Posons

$$ca^2 = \frac{1}{k^2}, \qquad d\omega = -\frac{k\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$c' - \frac{\omega}{k} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

On pourrait changer le signe du radical, ou de ω.

C'est une intégrale elliptique, fonction inverse de sinus amplitude t, de module k supposé plus petit que 1

$$t = \mathrm{S}n\left(c' - \frac{\omega}{k}\right)$$

$$\rho^2 = a^2\left(\frac{1}{\mathrm{S}n^2\left(c' - \frac{\omega}{k}\right)} - 1\right)$$

$$\rho = a\,\frac{\mathrm{C}n\left(c' - \frac{\omega}{k}\right)}{\mathrm{S}n\left(c' - \frac{\omega}{k}\right)}$$

c' et k sont deux constantes arbitraires.

Si $k > 1$, on pourra poser $kt = \theta$

$$d\omega = \frac{-d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)\left(1-\frac{\theta^2}{k^2}\right)}}$$

$$c' - \omega = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\theta^2)\left(1-\frac{\theta^2}{k^2}\right)}}.$$

Si $\mathrm{S}n\,u$ a pour module $\frac{1}{k}$, on a

$$kt = \theta = \mathrm{S}n(c' - \omega)$$

$$\rho^2 = a^2k^2\left(\frac{1}{\mathrm{S}n^2(c' - \omega)} - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\rho = \frac{ak}{\mathrm{S}n(c' - \omega)}\,dn(c' - \omega).$$

La fonction dn amplitude u étant définie par la relation

$$dnu = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\,\mathrm{S}nu}$$

si $\mathrm{S}nu$ correspond au module $\frac{1}{k}$.

En particulier, si $k = 1$ on a :

$$d\omega = \frac{dt}{1 - t^2} = \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right)\frac{dt}{2}$$

$$2(c + \omega) = \mathrm{L}\,\frac{1 + t}{1 - t}, \qquad \frac{1 + t}{1 - t} = e^{2(\omega + c)}$$

$$t = \frac{e^{2(\omega + c)} - 1}{e^{2(\omega + c)} + 1}, \qquad \rho = \frac{2ae^{\omega + c}}{e^{2(\omega + c)} - 1}.$$

Les lignes géodésiques ont ainsi leurs projections représentées par les trois systèmes de courbes :

$$\rho = a\,\frac{\mathrm{C}n\left(c \pm \frac{\omega}{k}\right)}{\mathrm{S}n\left(c \pm \frac{\omega}{k}\right)}, \qquad \rho = \frac{a}{k}\,\frac{dn(c \pm \omega)}{\mathrm{S}n(c \pm \omega)}$$

$$\rho = \frac{2a}{e^{\omega + c} - e^{-(\omega + c)}}$$

où $\mathrm{S}nu$, $\mathrm{C}nu$, dnu sont les fonctions elliptiques de module $k < 1$, k et c sont deux constantes arbitraires. En outre les génératrices, pour lesquelles ω est constant, sont des lignes géodésiques.

277. — Posons $x = \frac{1}{y}$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)(3x^2 + x + 1)}} = \frac{-dy}{\sqrt{(1 + y + y^2)(3 + y + y^2)}}$$

et $y = z - \frac{1}{2}$ pour avoir, sous le radical, un polynome en z^2

$$du = \frac{-dz}{\sqrt{\left(z^2 + \frac{3}{4}\right)\left(z^2 + \frac{11}{4}\right)}}.$$

Soit $z = \frac{1}{t}$, de façon que, la forme de la différentielle étant conservée, $x = 0$ corresponde à $t = 0$

$$du = \frac{dt}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}t^2\right)\left(1 + \frac{11}{4}t^2\right)}}$$

on a :

$$x = \frac{2}{2z - 1} = \frac{2t}{2 - t}$$

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)(3x^2 + x + 1)}} = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}t^2\right)\left(1 + \frac{11}{4}t^2\right)}}.$$

Pour ramener le radical à avoir des racines réelles, on peut poser :

$$1 + \frac{3}{4} t^2 = \frac{8}{11} \theta^2$$

$$du = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{11}{8}} \frac{d\theta}{t\sqrt{\frac{8}{3}(\theta^2 - 1)}} = \frac{2}{\sqrt{11}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta^2 - 1)\left(\frac{8}{11}\theta^2 - 1\right)}}$$

$$\frac{2x}{x+2} = t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{8}{11}\theta^2 - 1}$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{11}} \int_{\sqrt{\frac{11}{8}}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)\left(1 - \frac{8}{11}\theta^2\right)}}.$$

Si on pose

$$k = \sqrt{\frac{8}{11}},$$

la fonction Snv est définie par l'intégrale

$$v = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}}, \qquad \theta = Sn\, v.$$

Soit

$$\omega = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}}, \quad \omega + \omega' i = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}}$$

θ suivant l'axe réel, en passant au dessus pour éviter le point $\theta = 1$, de sorte que

$$\omega' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta^2 - 1)(1 - k^2\theta^2)}}$$

$$\frac{u}{2}\sqrt{11} = \int_{\frac{1}{k}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}} = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(1 - k^2\theta^2)}} - \omega - \omega' i$$

$$\theta = Sn\left(\frac{u}{2}\sqrt{11} + \omega + \omega' i\right).$$

Mais on peut employer la formule d'addition

$$Sn(u + v) = \frac{SnuCnvdnv + SnvCnudnu}{1 - k^2 Sn^2 u Sn^2 v}.$$

Si

$$v = \omega + \omega' i, \qquad \mathrm{S}n(\omega + \omega' i) = \frac{1}{k}, \qquad \mathrm{C}n(\omega + \omega' i) = \frac{-i}{k}\sqrt{1 - k^2}\,.$$

$$dn(\omega + \omega' i) = 0$$

$$\mathrm{S}n(u + \omega + \omega' i) = \frac{\mathrm{S}n(\omega + \omega' i)\mathrm{C}nu\,dnu}{1 - \mathrm{S}n^2 u} = \frac{dnu}{k\mathrm{C}nu}$$

$$\theta = \frac{dn\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}{k\mathrm{C}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}$$

$$k^2\theta^2 - 1 = \frac{dn^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}{\mathrm{C}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)} - 1 =$$

$$= \frac{1 - k^2\mathrm{S}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right) - \left(1 - \mathrm{S}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)\right)}{\mathrm{C}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)} =$$

$$= (1 - k^2)\frac{\mathrm{S}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}{\mathrm{C}n^2\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)},$$

$$\sqrt{\frac{8}{11}\theta^2 - 1} = \sqrt{\frac{3}{11}}\,\frac{\mathrm{S}n\,\frac{u}{2}\sqrt{11}}{\mathrm{C}n\,\frac{u}{2}\sqrt{11}}$$

$$\frac{2x}{x + 2} = \frac{2}{\sqrt{11}}\,\frac{\mathrm{S}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}{\mathrm{C}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}$$

$$x = \frac{2\mathrm{S}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}{\sqrt{11}\,\mathrm{C}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right) - \mathrm{S}n\left(\frac{u}{2}\sqrt{11}\right)}.$$

278. On a :

$$y^2 = \mathrm{X} = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

$$y_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad y_1 = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad y_2 = \int\frac{x^2 dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad y_3 = \int\frac{x^3 dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

La dérivée de $x^n\sqrt{X}$ est

$$nx^{n-1}\sqrt{X}+\frac{12x^2-g_2}{2\sqrt{X}}x^n=\frac{4(2n+3)x^3-(2n+1)g_2x-2ng_3}{2\sqrt{X}}x^{n-1}.$$

Si $n=0$, ou 1, on en déduit :

$$\sqrt{X}=\int\frac{12x^2-g_2}{2\sqrt{X}}dx=6y_2-\frac{g_2}{2}y_0$$

$$x\sqrt{X}=\int\frac{20x^3-3g_2x-2g_3}{2\sqrt{X}}dx=10y_3-\frac{3}{2}g_2y_1-g_3y_0$$

ou :

$$y_2=\frac{g_2}{12}y_0+\frac{1}{6}\sqrt{X},\qquad y_3=\frac{3g_2y_1+2g_3y_0+2x\sqrt{X}}{20}.$$

La dérivée de $(x-a)^n\sqrt{X}$ est

$$n(x-a)^{n-1}\sqrt{X}+(x-a)^n\frac{12x^2-g_2}{2\sqrt{X}}=$$

$$=\frac{2n(4x^3-g_2x-g_3)+(x-a)(12x^2-g_2)}{2(x-a)^{1-n}\sqrt{X}}=$$

$$=\frac{4(2n+3)(x-a)^3+24(n+1)a(x-a)^2+(2n+1)(12a^2-g_2)(x-a)+2n(4a^3-ag_2-g_3)}{2(x-a)^{1-n}\sqrt{X}}.$$

Si a n'est pas un zéro de X, $4a^3-ag_2-g_3$ n'est pas nul. Pour $n=-1$, on a :

$$\frac{\sqrt{X}}{x-a}=\int\frac{4(x-a)^3-(12a^2-g_2)(x-a)-2(4a^3-ag_2-g_3)}{2(x-a)^2\sqrt{X}}=$$

$$=2(y_1-ay_0)-\left(6a^2-\frac{g_2}{2}\right)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}-(4a^3-ag_2-g_3)\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}}$$

ce qui donne l'expression de

$$z_2=\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}}.$$

Si $4a^3-ag_2-g_3=0$. Cette équation donne

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}}=\frac{2}{g_2-12a^2}\left(\frac{\sqrt{X}}{x-a}-2y_1+2ay_0\right).$$

Pour $n = -2$, on a alors :

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-a)^2} = -2y_0 - 12a\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{X}} - 3\,\frac{12a^2 - g_2}{2}\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}}$$

$$\frac{3}{2}(12a^2 - g_2)^2\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{X}} = (g_2 - 12a^2)\left(2y_0 + \frac{\sqrt{X}}{(x-a)^2}\right) +$$

$$+ 24a\left(\frac{\sqrt{X}}{x-a} - 2y_1 + 2ay_0\right).$$

Si on pose

$$x = p(u), \qquad y = \sqrt{X} = p'(u),$$

on en déduit :

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = du, \qquad y_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{X}} = u$$

en choisissant u de façon que la constante d'intégration soit nulle. On a alors :

$$\int p^2(u)du = \frac{g_2}{12}u + \frac{1}{6}p'(u)$$

$$20\int p^3(u)du = 2g_3u + 2p(u)p'(u) + 3g_2\int p(u)du$$

$$(4a^3 - ag_2 - g_3)\int\frac{du}{(p(u)-a)^2} =$$

$$= \frac{p'(u)}{a - p(u)} - 2au + 2\int p(u)du - \left(6a^2 - \frac{g_2}{2}\right)\int\frac{du}{p(u)-a}.$$

Si e_1 est l'une des racines de X,

$$4e_1^3 - c_1g_2 - g_3 = 0$$

$$\int\frac{du}{p(u)-e_1} = \frac{2}{g_2 - 12e_1^2}\left(\frac{p'(u)}{p(u)-e_1} + 2e_1u - 2\int p(u)du\right)$$

$$\frac{3}{2}(12e_1^2 - g_2)\int\frac{du}{(p(u)-e_1)^2} = -\frac{p'(u)}{(p(u)-e_1)^2} - 2u - 12a\int\frac{du}{p(u)-e_1}.$$

279. On a les relations :

$$p(u+v) + p(u) + p(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2$$

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3.$$

Si u tend vers v, le rapport

$$\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}$$

a pour limite

$$\frac{p''(u)}{p'(u)} = \frac{p'p''}{p'^2} = \frac{12\,p^2(u) - g_2}{2p'(u)}.$$

On a alors :

$$(1) \qquad p(2u) = -2p(u) + \frac{\left(3p^2(u) - \frac{1}{4}g_2\right)^2}{4p^3(u) - g_2p(u) - g_3} =$$

$$= \frac{p^4(u) + \frac{1}{2}p^2(u)g_2 + \left(\frac{g_2}{4}\right)^2 + 2p(u)g_3}{4p^3(u) - g_2p(u) - g_3} = \frac{\left(p^2(u) + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2g_3p(u)}{4p^3(u) - g_2p(u) - g_3}.$$

2° Si

$$p(u) = a, \qquad p\left(\frac{u}{2}\right) = t$$

est donné par l'équation du quatrième degré

$$a + 2t = \frac{\left(3t^2 - \frac{g_2}{4}\right)^2}{4t^3 - g_2t - g_3}$$

$$(2) \qquad t^4 - 4at^3 + \frac{g_2}{2}t^2 + (ag_2 + 2g_3)t + ag_3 + \left(\frac{g_2}{4}\right)^2 = 0.$$

La tangente à la cubique

$$x = p(u), \qquad y = p'(u), \qquad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

a pour équation :

$$Y - X\frac{p''(u)}{p'(u)} = p'(u) - p(u)\frac{p''(u)}{p'(u)}$$

$$Y - p'(u) = \left(X - p(u)\right)\frac{6p^2(u) - \frac{g_2}{2}}{p'(u)}.$$

Supposons que cette tangente coupe la cubique en un point

$$X = p(v), \qquad Y = p'(v)$$

on aura

$$\frac{p'(v) - p'(u)}{p(v) - p(u)} = \frac{6p^2(u) - \frac{g_2}{2}}{p'(u)}$$

$$p(u + v) + p(u) + p(v) = \frac{\left(3p^2(u) - \frac{g_2}{4}\right)^2}{4p^3(u) - g_2p(u) - g_3}.$$

Cette équation est vérifiée si $v = u$ et aussi si $v = -2u$, car $p(u)$ est une fonction paire, $p(-u) = p(u)$. D'autre part $p(u)$ a deux périodes

$$p(u + 2\omega) = p(u + 2\omega') = p(u).$$

Si on remplace u par $\frac{u}{2}$, v par $-u$, en posant

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = t, \qquad p(-u) = p(u) = a,$$

on retrouve l'équation (2). Si par le point u de la cubique on mène des tangentes, les points de contact de ces tangentes sont les points

$$v = -\frac{u + 2K\omega + 2K'\omega'}{2},$$

c'est-à-dire les 4 points

$$-\frac{u}{2}, \qquad -\frac{u}{2} + \omega, \qquad -\frac{u}{2} + \omega', \qquad -\frac{u}{2} + \omega + \omega',$$

les abscisses sont les 4 racines $t = p\left(\frac{u}{2} - K\omega - K'\omega'\right)$ de l'équation (2).

3° 2ω et $\frac{2\omega'}{i}$ sont réels lorsque l'équation

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0$$

a ses racines réelles,

$$27\, g_3^2 - g_2^3 < 0.$$

Soient e_1, e_2 et e_3 ces racines

$$e_3 < e_2 < e_1, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

On peut définir la fonction $p(u)$ par l'intégrale

$$u = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_x^\infty \frac{dx}{2\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

$x = p(u)$. Les périodes sont :

$$2\omega = \int_{e_1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)}}, \qquad 2\omega' = i\int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{(e_1 - x)(x - e_2)(x - e_3)}}$$

Lorsque x est compris entre e_1 et ∞, u est réel et varie de ω à 0.

Si $e_3 < x < e_2$

$$u = \int_x^{e_2} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} + \omega' + \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

$u - \omega'$ est réel et varie de o à ω.

Inversement, lorsque u varie de o à ω, $p(u)$ reste réel et varie de ∞ à e_1, $p'(u)$ varie en même temps de ∞ à o. Si $u - \omega'$ prend des valeurs réelles, de o à ω, $p(u)$ reste réel, et varie de e_3 à e_2. La courbe

$$y = p'(u), \qquad x = p(u)$$

comprend une partie fermée pour $e_3 < x < e_2$ et une branche infinie pour $e_1 < x < \infty$, elle est symétrique par rapport à ox. Si $a = p(u)$, par le point u on peut mener 4 tangentes dont les points de contact sont

$$-\frac{u}{2} + K\omega + K'\omega'.$$

Si u est réel, $o < u < \omega$, $e_1 < x < \infty$, aux 4 valeurs

$$-\frac{u}{2}, \qquad -\frac{u}{2} + \omega, \qquad -\frac{u}{2} + \omega', \qquad -\frac{u}{2} + \omega + \omega'$$

correspondent 4 points de contact réels, et 4 valeurs réelles de $t = p\left(\frac{u}{2}\right)$, deux sont comprises entre e_3 et e_2, et deux entre e_1 et ∞. On a aussi $e_1 < a < \infty$. Si $u - \omega'$ est réel, $e_3 < x < e_2$, soit $u = \omega' + \alpha$, les 4 points

$$-\frac{\alpha + \omega'}{2} + K\omega + K'\omega'$$

sont imaginaires. Les 4 racines sont réelles lorsque $a > e_1$, u est réel, et on peut supposer $o < u < \omega$. On a :

$$t = p(v), \qquad v_1 = -\frac{u}{2} + \omega', \qquad v_2 = -\frac{u}{2} + \omega + \omega',$$

$$v_3 = -\frac{u}{2}, \qquad v_4 = -\frac{u}{2} + \omega.$$

4° Si

$$u = \omega, \qquad a = p(\omega) = e_1,$$

les 4 valeurs de t sont

$$t_1 = p\left(\omega' - \frac{\omega}{2}\right), \quad t_2 = p\left(\omega' + \frac{\omega}{2}\right), \quad t_3 = p\left(-\frac{\omega}{2}\right), \quad t_4 = p\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

On a alors

$$t_2 = p\left(\omega' + \frac{\omega}{2} - 2\omega'\right) = p\left(\omega' - \frac{\omega}{2}\right) = t_1 \quad \text{et} \quad t_3 = t_4.$$

Le premier membre de l'équation (1) doit être un carré. On a, en effet :

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 4(e_1^2 - e_2e_3)$$
$$g_3 = 4e_1e_2e_3.$$

L'équation (2) où $a = e_1$ devient

$$t^4 - 4e_1t^3 + 2(e_1^2 - e_2e_3)t^2 + 4e_1(e_1^2 + e_2e_3)t + (e_1^2 + e_2e_3)^2 = 0$$
$$(t^2 - 2e_1t - e_1^2 - e_2e_3)^2 = 0$$
$$t = e_1 \pm \sqrt{2e_1^2 + e_2e_3} = e_1 \pm \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$$
$$p\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$$
$$p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = e_1 - \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$$

le point

$$x = e_1, \qquad y = p'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$$

étant sur ox, les tangentes menées par ce point sont symétriques par rapport à ox.

TABLE DES MATIÈRES

ÉNONCÉS

Chapitre I. Quadratures 1
Chapitre II. Intégrales multiples. Surfaces-Volumes. 5
Chapitre III. Fonctions analytiques. Intégrales curvilignes 11
Chapitre IV. Equations différentielles 17
Chapitre V. Courbes planes 25
Chapitre VI. Courbes et Surfaces 29
Chapitre VII. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure. 34
Chapitre VIII. Surfaces réglées 42
Chapitre IX. Equations aux dérivées partielles. 47
Chapitre X. Applications géométriques des équations aux dérivées partielles. 55
Chapitre XI. Différentielles totales 62
Chapitre XII. Fonctions elliptiques 65

SOLUTIONS

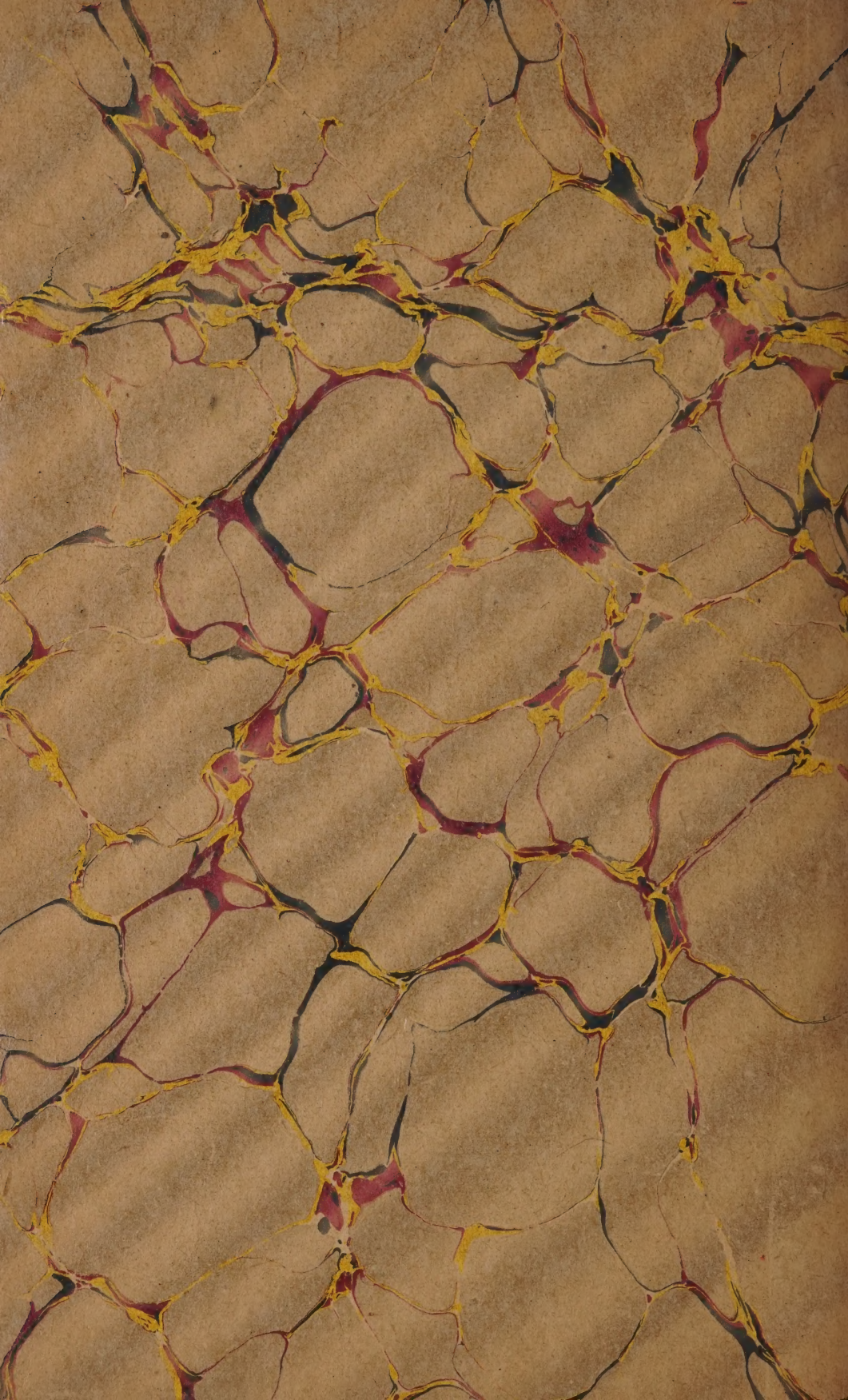
Chapitre I. Quadratures 67
Chapitre II. Intégrales multiples. Surfaces-Volumes 96
Chapitre III. Fonctions analytiques. Intégrales curvilignes 131
Chapitre IV. Equations différentielles 161
Chapitre V. Courbes planes 203
Chapitre VI. Courbes et Surfaces 238
Chapitre VII. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure. 266
Chapitre VIII. Surfaces réglées 315

CHAPITRE IX. Equations aux dérivées partielles 343
CHAPITRE X. Applications géométriques des équations aux dérivées partielles 386
CHAPITRE XI. Différentielles totales 432
CHAPITRE XII. Fonctions elliptiques 446

ERRATA

Page	*Ligne*	*Problème*		*au lieu de*	*Lire*
8	21	49		$z =$	$y =$
8	dernière	51	*ajouter*	Paris, novembre 1901.	
22	17	113		$v = \frac{u''}{u}$	$v = \frac{u''}{u'}$
24	9	120		$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$	$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$
26	14	128		tangente	normale
32	10	157		$y = l \sin \varphi \sin \theta$	$y = l \sin \varphi \cos \theta$
48	10	212		$\sqrt{x^2 + y^2 - a}$	$\sqrt{x^2 + y^2} - a$
49	11	216		$2q \operatorname{sh} x$	$2qy \operatorname{sh} x$
59	1	256		centre c	centre o

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE



G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515F11P C001
PROBLEMES D'ANALYSE MATHEMATIQUE PARIS
3 0112 017227684